Rapporten Kompetencer og Matematiklæring er udarbejdet af en arbejdsgruppe nedsat af Uddannelsesstyrelsen i samarbejde med Naturvidenskabeligt Uddannelsesråd. Rapporten indeholder en ny kompetencebaseret systematik til forståelse og udvikling af faget matematik samt en række forslag til fornyelse af matematikundervisningen.

Arbejdsgruppen argumenterer for, at læseplaner i matematik - og i alle andre fag - bør fokusere på den kompetence (i betydningen "ekspertise"), som eleverne skal have opbygget på et givet trin af uddannelsessystemet i stedet for den traditionelle kraftige fokusering på pensumlister.
Rapporten præsenterer otte centrale matematiske kompetencer, som har gyldighed for matematikundervisning på samtlige uddannelsestrin:

- Tankegangskompetence – at kunne udøve matematisk tankegang
- Problembehandlingskompetence – at kunne formulere og løse matematiske problemer
- Modelleringskompetence – at kunne analysere og bygge matematiske modeller vedrørende andre felter
- Ræsonnementskompetence – at kunne ræsonnere matematisk
- Repræsentationskompetence – at kunne håndtere forskellige repræsentationer af matematiske sagsforhold
- Symbol- og formalismekompetence – at kunne håndtere matematisk symbolsprog og formalisme
- Kommunikationskompetence – at kunne kommunikere i, med og om matematik
- Hjælpemiddelkompetence – at kunne betjene sig af og forholde sig til hjælpemidler for matematisk virksomhed, herunder it.

Desuden udpeges tre former for overblik og dømmekraft vedrørende matematik:

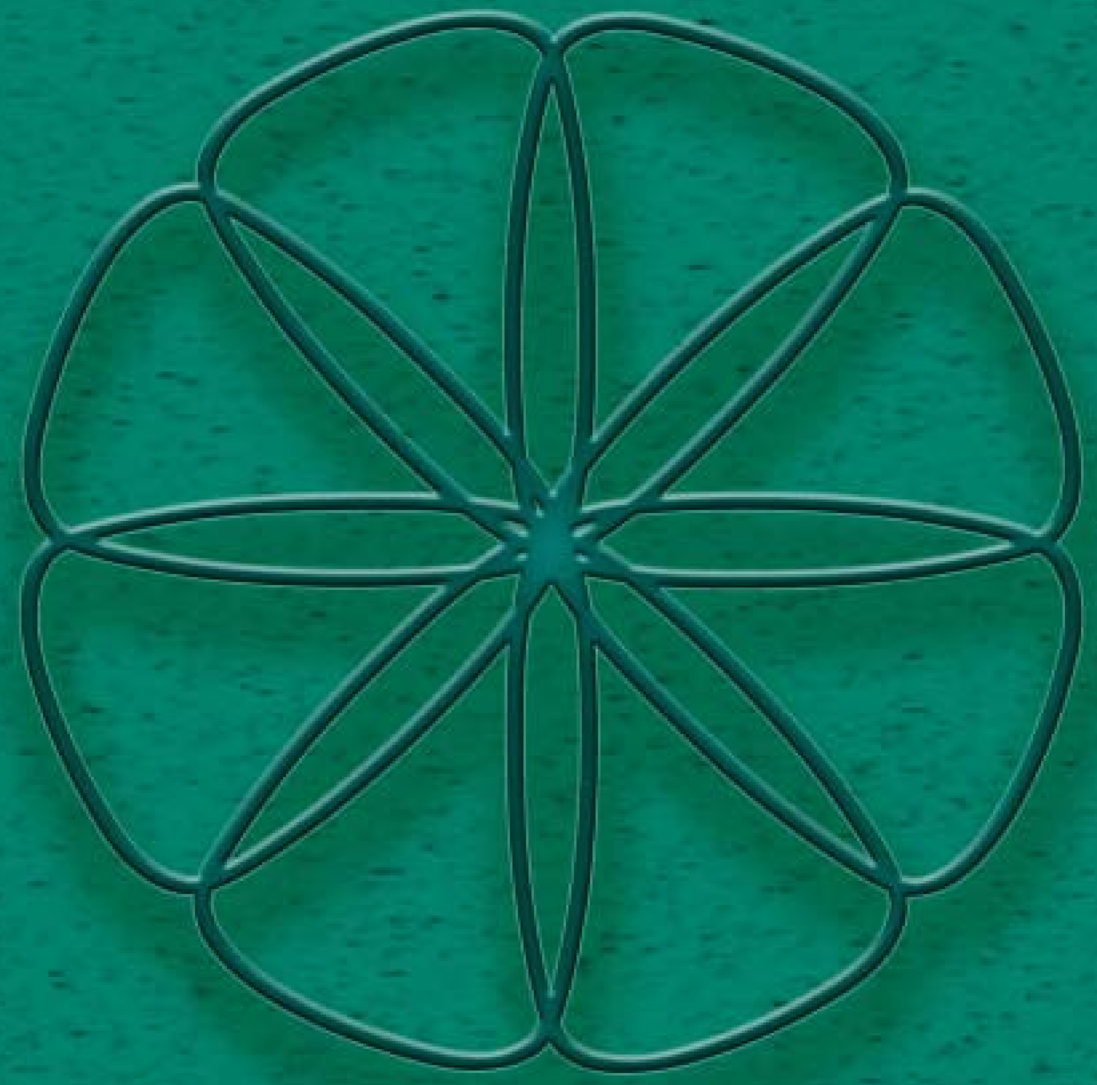
- Matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder
- Matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning
- Matematikkens karakter som fagområde.

UNDERVISNINGS
MINISTERIET

Kompetencer og matematiklæring

Kompetencer og matematiklæring

Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark



Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18 - 2002

Kompetencer og matematiklæring

Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark

Redaktion:
Mogens Niss og Tomas Højgaard Jensen,
Roskilde Universitetscenter

Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18 - 2002

Undervisningsministeriet 2002

Kompetencer og matematiklæring
Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark

Publikationen indgår i Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie som nr. 18 - 2002 og under det tværgående tema *værdier og indhold*

Forfattere: Mogens Niss, Tomas Højgaard Jensen, Tage Bai Andersen, Rune Wåhlin Andersen, Torben Christoffersen, Søren Damgaard, Therese Gustavsen, Kristine Jess, Jakob Lange, Lena Lindenskov, Malene Bonné Meyer og Knud Nissen (KOM-arbejdsgruppen)

Redaktion: Mogens Niss og Tomas Højgaard Jensen, Roskilde Universitetscenter
Tegninger og grafik: Arnold Skimminge
Omslag: Sangill Grafisk Produktion

1. udgave, 1. oplag, oktober 2002: 7.000 stk.

ISBN 87-603-2244-6
ISBN (WWW) 87-603-2246-2
ISSN 1399-2279
Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie (Online) ISSN 1399-7386
Udgivet af Undervisningsministeriet, Uddannelsesstyrelsen

Bestilles (UVM 6-287) hos:
Undervisningsministeriets forlag
Strandgade 100 D
1401 København K
Tlf. nr. 3392 5220
Fax nr. 3392 5219
E-mail: forlag@uvm.dk

eller hos boghandlere

Grafisk tilrettelæggelse og repro: Sangill Grafisk Produktion
Trykt på papir der er ISO 14001 godkendt og med vegetabilske farver
Trykt af Sangill Grafisk Produktion, miljøcertificeret

Printed in Denmark 2002

Forord

En nærmest eksplosiv vidensproduktion og omfattende forandringer i kultur og samfund sætter vore uddannelser, fagene og fagligheden under pres og gør det mere end nogensinde påkrævet at forlade en traditionel pensumtænkning og anlægge nye vinkler på undervisningens mål og indhold og på evaluerings- og prøveformer. Som led i denne proces har Uddannelsesstyrelsen nedsat og finansieret analyse- og arbejdsgrupper i udvalgte fag og fagområder. Den første af disse grupper, der blev dannet i samarbejde med Naturvidenskabeligt Uddannelsesråd, har forestået projektet Kompetencer og Matematiklæring. Gruppen, der har haft Mogens Niss, professor ved Roskilde Universitetscenter i matematik og matematikkens didaktik, som formand, fremlægger med denne rapport resultaterne af en omfattende analyse af faget matematik på alle niveauer i uddannelsessystemet.

Ansvaret for rapportens indhold og anbefalinger ligger fuldt ud hos arbejdsgruppen. Uddannelsesstyrelsen vil gerne rette en stor tak til gruppens medlemmer for gennemførelse af dette meget omfattende projekt, der forventes at sætte et betydeligt præg på først og fremmest udviklingen i matematikfaget, men også bredere på den faglige tænkning i andre fagområder.

Det kan varmt anbefales, at alle med interesse for matematik – eller faglighed på andre fagområder - lader sig inspirere af rapporten. Det gælder ikke mindst lærere på alle niveauer, lærebogsforfattere og tilrettelæggere af efteruddannelse. Også Uddannelsesstyrelsen vil i arbejdet med fornyelse af såvel matematikfaget som andre fag lægge vægt på at nyttiggøre de mange spændende ideer og perspektiver i rapporten.

Undervisningsministeriet har finansieret udarbejdelsen og udgivelsen af publikationen.

Jarl Damgaard
Uddannelsesdirektør
Undervisningsministeriet
Uddannelsesstyrelsen
September 2002

Forord

Hermed afgiver arbejdsgruppen for projektet *Kompetencer Og Matematiklæring* (KOM-projektet) sin rapport. Arbejdsgruppen blev nedsat i august 2000 af Naturvidenskabeligt Uddannelsesråd og Undervisningsministeriet i forening. Arbejdet har været finansieret af en bevilling fra Undervisningsministeriet, som først og fremmest har dækket lønnen til projektets akademiske sekretær og til studentermedhjælp, og derudover udgifterne til mødevirksomhed for arbejdsgruppen og dens gruppe af "sparringspartnere".

Jeg vil gerne benytte lejligheden til at takke arbejdsgruppens medlemmer Tage Bai Andersen, Rune Wåhlin Andersen, Torben Christoffersen, Søren Damgaard, Therese Gustavsen (som deltog i arbejdet i den første fase), Kristine Jess, Jakob Lange, Lena Lindenskov, Malene Bonné Meyer (som deltog i arbejdet i den første fase) og Knud Nissen, samt ikke mindst arbejdsgruppens sekretær, Tomas Højgaard Jensen, for en stor og konstruktiv indsats. Dernæst fortjener også den store gruppe af sparringpartnere (som er nævnt i kapitel 1) og andre interesserede medvirkende megen tak for deres bidrag til projektet. Samarbejdet med Undervisningsministeriet, frem for alt med Torben Christoffersen, Jarl Damgaard og Jørgen Balling Rasmussen, men også med fagkonsulenter og andre, har været fortræffeligt og konstruktivt. Også for det vil jeg gerne udtrykke min tak. Sluttelig er der grund til at takke projektets skiftende, men altid beredvillige og effektive studentermedhjælpere, Eva Uhre, Gitte Jensen, Nesli Saglanmak og Arnold Skimminge, alle matematik- og fysikstuderende ved RUC, for deres indsats.

Roskilde den 21. maj 2002

Mogens Niss, formand for arbejdsgruppen

Oversigt over rapporten

Rapporten er opdelt i syv dele, der i alt rummer 19 kapitler. Her danner de første seks dele rapportens generelle afsnit, mens den sidste del rummer en omtale af træk ved matematikundervisningen i en række udvalgte uddannelsesformer eller –trin.

Del I: Introduktion

Projektets udgangspunkt, kommissorium, struktur og afgrænsning behandles i kapitel 1, der sammen med besvarelsen af kommissoriets spørgsmål — i kapitel 2 — danner rapportens del I. Besvarelsen af kommissoriet er således præsenteret tidligt i rapporten, selv om det grundlag, besvarelsen hviler på, først etableres i de efterfølgende kapitler.

Del II: Kompetencer som middel til fagbeskrivelser af matematik

De grundlæggende afsnit i rapporten – de afsnit, hvori den tænkning, der bærer projektet, præsenteres – udgøres af henholdsvis kapitel 3, hvor opgaven for projektets teoretiske del præciseres, og kapitel 4, som er viet en indgående omtale af kompetencebeskrivelse af matematisk faglighed. Heri fremlægges otte matematiske kompetencer og tre former for overblik og dømmekraft vedrørende matematikken som fagområde som de fælles konstituenter i matematikbeherskelse/matematikkompetence, uanset undervisningstrin og uanset de matematiske stofområder, beherskelsen kommer i spil over for. Det er projektets hovedtanke, at al matematikundervisning skal sigte på at fremme elevers og studerendes udvikling af disse matematiske kompetencer og former for overblik og dømmekraft. Til sammen udgør disse to kapitler rapportens del II.

Del III: Uddannelsen af matematiklærere

I betragtning af, at matematiklærerne har en nøglerolle at spille, hvis undervisningen skal efterstræbe udviklingen af matematikbeherskelse i dette projekts forstand, har vi fundet det væsentligt at give en omtale af matematiklæreres kompetencer en fremskudt placering i rapporten. Det sker i del III, som kort indledes af kapitel 5, der understreger betydningen af et frugtbart samspil mellem forskellige slags matematiklærerkompetencer. Det skal understreges, at del III behandler alle matematiklæreruddannelser under ét, dvs. både grundskolelærere, lærere ved de gymnasiale uddannelser, og lærere ved de videregående uddannelser. Derefter kommer to kapitler, hvor det første, kapitel 6, fremlægger seks former for specifik didaktisk-pædagogisk kompetence, som en matematiklærer må besidde, mens det andet, kapitel 7, fokuserer på matematiklæreres matematiske kompetencer, sådan som de kommer til udtryk i en undervisning præget af faglig-pædagogisk adræthed, gennemslagskraft og overskud.

Del IV: Kompetencer og fagligt stof

Eftersom matematiske kompetencer både udvikles og udøves i omgangen med forskellige former for fagligt stof, er det væsentligt at klarlægge relationen mellem henholdsvis kompetencerne og sådant stof. Det sker i del IV, som kun rummer ét kapitel (kapitel 8). Heri slås fast, at forholdet mellem kompetencer og faglige stofområder på et givet uddannelsestrin har en todimensional matrixkarakter. Tilføjes uddannelsestrinnet som variabel, bliver der tale om en tredimensional struktur. I kapitlet præsenteres også ti matematiske stofområder, som arbejdsgruppen har udpeget som bærende for matematikundervisningen i hele skolesystemet samt i de indledende trin af videregående matematikundervisning.

Det er et hovedpunkt for projektet at bidrage til at fremme progression og sammenhæng i matematikundervisningen på langs og tværs af uddannelsesystemet, og til at skabe gyldige og pålidelige former til evaluering af en persons besiddelse af matematiske kompetencer. Disse spørgsmål er på dagsorden i del V, hvis (eneste) kapitel, 9, dels diskuterer statistisk og dynamisk evaluering af kompetencebesiddelse i forhold til henholdsvis eksisterende og ønskelige evalueringsformer og –instrumenter, dels karakteriserer progression i matematisk kompetenceudvikling og mulighederne for (dynamisk) evaluering heraf.

Del V: Progression i og evaluering af kompetenceudvikling

Del VI: Videre frem: Udfordringer og anbefalinger

Rapportens generelle del afsluttes med del VI, der rummer to kapitler. I det første, kapitel 10, gives en karakteristik af udvalgte centrale problemstillinger for dansk matematikundervisning. Det er en hovedkonklusion, at matematikundervisningen i mange henseender er indrettet, bedrives og virker ganske tilfredsstillende, men at der findes en hel del problemer og udfordringer, som der bør og kan gøres noget ved. Man kunne måske sige, at det ville have forekommet mere naturligt at bringe dette kapitel tidligt i rapporten, som et middel til at sætte scenen for denne. Men da det kunne give det ikke dækkende indtryk, at det opstillede apparat til karakterisering og bedømmelse af matematisk kompetence er afledt af disse problemer og udfordringer, har vi altså valgt at placere kapitlet på dette sted, hvor det også bliver muligt at pege på problemstillinger, som vi i projektet har måttet lade ligge.

Rapportens anbefalinger

Det sidste kapitel (kapitel 11) i del VI og i den generelle del af rapporten, udgøres af de anbefalinger, arbejdsgruppen har ønsket at fremsætte over for forskellige instanser, nemlig Undervisningsministeriet, universiteter og højere læreanstalter, lærerseminarierne/CVU'erne, erhvervsuddannelsesskoler, lokale skolemyndigheder, herunder kommuner og amter, matematiklærere og deres organisationer, lærebogsforfattere og forlag samt matematikdidaktiske forskere.

Del VII: Matematiske kompetencer på udvalgte uddannelser

Rapportens syvende og sidste del omfatter et antal mere indgående parallelle beskrivelser af matematiske kompetencer på udvalgte uddannelser. Disse beskrivelser skal først og fremmest tjene til i konkret form at specificere og eksemplificere rapportens generelle betragtninger. Som nærmere beskrevet i kapitel A er disse af to slags. Dels uddannelser, der hører hjemme i den almene del af uddannelsessystemet, som ikke sigter mod bestemte erhverv eller professioner. Det drejer sig om uddannelserne i grundskolen (kapitel B), det almene gymnasium (kapitel D), samt universitetsuddannelser i matematiske fag (kapitel H). For disse uddannelser har vi valgt en normativ tilgang til kompetencebeskrivelsen. Dels uddannelser, som sigter mod bestemte erhverv eller professioner, nemlig gastronomuddannelsen (kapitel E), elektrikeruddannelsen (kapitel F) og datamatikeruddannelsen (kapitel G), hvor kompetencetilgangen er deskriptiv. På overgangen mellem de to slags uddannelser står henholdsvis forberedende og almen voksenundervisning (kapitel C), hvor vi også har anlagt en deskriptiv synsvinkel.

Litteraturliste

Rapporten afsluttes med en liste over udvalgt refereret litteratur.

Indhold

Del I

Introduktion

1 Indledning

1.1 Udgangspunkt

Projektet *Kompetenceudvikling Og Matematiklæring* blev sat i værk i løbet af sommeren 2000. Initiativet kom fra Naturvidenskabeligt Uddannelsesråd, som ønskede at medvirke til, at der blev igangsat en udvikling af matematikundervisningen som spydspids-projekt for en mulig tilsvarende udvikling inden for andre fag. Undervisningsministeriet gav herefter tilsagn om at ville finansiere projektet og – såfremt det nåede frem til implementerbare resultater – gå aktivt ind i spørgsmålet om implementering af de konkrete forslag, som den nedsatte arbejdsgruppe måtte fremkomme med, jf. kommissoriet nedenfor. Det skal på dette sted slås fast, at fra og med arbejdsgruppens nedsættelse og modtagelse af kommissoriet har arbejdsgruppen virket helt uden at have været udsat for forsøg på ekstern påvirkning af dens arbejde fra opdragsgivernes eller anden side. Resultatet af arbejdet er derfor alene et produkt af arbejdsgruppens egne aktiviteter, betragtninger og beslutninger.

Start i sommeren 2000 på initiativ fra Naturvidenskabeligt Uddannelsesråd og Undervisningsministeriet

Arbejdsgruppen autonom

1.1.1 De involverede

De involverede i projektet har i første række bestået af den omtalte arbejdsgruppe med tolv medlemmer[1]: Rune Wåhlin Andersen (geolog; bestyrelsesformand i initiativet Højskolen for Natur og Kommunikation), Tage Bai Andersen (matematiker; studieleder, Aarhus Universitet), Torben Christoffersen (tidligere gymnasielærer i matematik; kontorchef, Undervisningsministeriet; forbindelsesofficer mellem arbejdsgruppen og Ministeriet), Søren Damgaard (fysiker; ansat ved IBM; formand for Naturvidenskabeligt Uddannelsesråd), Therese Gustavsen (folkeskolelærer; Brøndby Kommune), Tomas Højgaard Jensen (projektets *sekretær*, ph.d.-studerende i matematikkens didaktik; Roskilde Universitetscenter), Kristine Jess (seminarielærer i matematik; Københavns Dag- og Aftenseminarium), Jakob Lange (samfundsfagskandidat; kontorchef, Københavns Universitet, leder af Den Koordinerede Tilmelding), Lena Lindenskov (matematikdidaktiker; Danmarks Pædagogiske Universitet), Malene Bonné Meyer (humanbiolog; Hospitalslaborantskolen i København), Mogens Niss (projektets *formand*, matematiker og matematikdidaktiker; Roskilde Universitetscenter) og Knud Nissen (gymnasielæ-

Arbejdsgruppens medlemmer

[1] Se http://imfufa.ruc.dk/kom for en nærmere præsentation anno 2002.

rer i matematik og datalogi; VUC Aarhus). Af forskellige grunde har Therese Gustavsen og Malene Bonné Meyer ikke kunnet deltage i de senere faser af arbejdet.

Sparringspartnergruppen

Arbejdsgruppen har fået hjælp fra en stor gruppe "sparringspartnere", som løbende har bidraget med konstruktive reaktioner på arbejdsgruppens idéer og forestillinger, samt, for nogles vedkommende, hjælp til skrivningen af konkrete dele af rapporten. Med enkelte udskiftninger pga. jobskift undervejs drejer det sig samlet set om: Knud Flemming Andersen, Søren Antonius, Søren Bjerregaard, Michael Caspersen, Bjørn Grøn, Anne-Marie Kristensen, Karsten Enggaard, Dan Eriksen, Erik von Essen, Bent Hirsberg, Marianne Holmer, Eva Høg, Tom Høholdt, Torben Pilegaard Jensen, Claus Jessen, Hanne Kock, Jens Helveg Larsen, Kjeld Bagger Laursen, Peter Limkilde, Nikolaj Lomholt, Marianne Nissen, Elsebeth Pedersen, Bjarne Sonberg, Hans Søndergaard, Søren Vagner, Jørn Vesterdal og Karsten Wegener.

Kontakt med omverdenen

Herudover er gruppen af involverede løbende forsøgt udvidet til at indbefatte et større antal personer med tilknytning til matematikundervisningen i Danmark. Dette forsøg, på allerede i de tidlige faser af arbejdet at gøre det til "de manges projekt", er bl.a. sket ved at bede en række personer uden for arbejdsgruppen, og i begyndelsen også uden for sparringgruppen, om hjælp med dele af afklarings- og skrivearbejdet. Derudover har arbejdsgruppens formand og sekretær, samt andre medlemmer af gruppen, været indbudt til et meget stort antal møder på skoler, i foreninger, organisationer og amter, i råd og ministerier, ved møder og konferencer m.v. for at diskutere de bærende idéer i projektet, mens de udviklede sig. Kontakten med "omverdenen" har ikke kun omfattet matematikundervisningskredse, men også kredse med tilknytning til andre fagområder. For eksempel har der været holdt mange møder og pædagogiske eftermiddage med hele lærerkollegier på gymnasier og VUCer. Derudover er der skabt forbindelse og udveksling af betragtninger og tekster med mere eller mindre parallelle arbejdsgrupper for *Fremtidens danskfag* under ledelse af Frans Gregersen og *Kompetenceudvikling fysik/kemi-læring* under ledelse af Ove Poulsen, samt med de designerede ledere af planlagte fremtidige projekter om naturfag og fremmedsprog. Hensigten med hele denne kontaktvirksomhed har, helt fra begyndelsen, været at sikre projektet medejerskab hos de instanser, som i givet fald skal bære det igennem til realisering, herunder frem for alt landets nuværende og kommende matematiklærere på alle trin. Til støtte for denne hensigt har arbejdstekster i foreløbig skikkelse været gjort tilgængelige på projektets hjemmeside[2] http://imfufa.ruc.dk/kom for interesseredes orientering og reaktion.

1.1.2 Arbejdsprocessen

Mødevirksomhed og rapportskrivning

Arbejdet med projektet har fundet sted i et samspil mellem møder i arbejdsgruppen, i alt 17, møder mellem arbejdsgruppen og sparringgruppen, i alt 4, samt ikke

[2] Her kan såvel denne rapport, som en engelsk oversættelse heraf, hentes.

mindst virksomheden mellem møderne, hvor arbejdsgruppens formand og sekretær, med assistance fra de ovenfor nævnte personer, har arbejdet med at producere arbejdstekster, fremskaffe baggrundsmateriale osv. Som rapporten fremstår, har pennen i hovedsagen været ført af formanden, *Mogens Niss*, med sekretæren, *Tomas Højgaard Jensen*, som medforfatter. Den samlede rapport er imidlertid blevet produceret i en iterativ proces bestående af et meget stort antal skridt, omfattende skiftevis fremstilling af udkast og drøftelser i arbejdsgruppen. Rapporten er dermed den samlede arbejdsgruppes rapport.

1.2 Kommissorium

Projektets kommissorium blev i samarbejde mellem Naturvidenskabeligt Uddannelsesråd, Undervisningsministeriet og arbejdsgruppens formand formuleret som følger:

Kommissoriet

> "Arbejdsgruppen har til opgave at belyse nedenstående spørgsmål (nævnt i tilfældig rækkefølge):
>
> a) I hvilken udstrækning er der behov for at forny den eksisterende matematikundervisning?
>
> b) Hvilke matematiske kompetencer skal der være opbygget hos eleverne på de forskellige stadier af uddannelsessystemet?
>
> c) Hvordan sikrer man progression og sammenhæng i matematikundervisningen gennem hele uddannelsessystemet?
>
> d) Hvordan måler man matematiske kompetencer?
>
> e) Hvilket indhold skal der være i et tidssvarende matematikfag?
>
> f) Hvordan sikrer man, at der sker en løbende udvikling af matematikfaget og matematikundervisningen?
>
> g) Hvad er samfundets krav til matematikundervisningen?
>
> h) Hvordan ser fremtidens undervisningsmaterialer i matematik ud?
>
> i) Hvordan kan man i Danmark udnytte internationale erfaringer med matematikundervisning?
>
> j) Hvordan skal fremtidens matematikundervisning være organiseret?
>
> Gruppen skal derudover opstille en række anbefalinger, som giver forslag til, dels hvordan projektet skal videreføres, dels hvordan svarene på ovennævnte spørgsmål kan operationaliseres.
>
> Gruppen indleder sit arbejde i september 2000 og skal have afsluttet sit arbejde med udgangen af 2001."

1.3 Struktur og afgrænsning

To faser i arbejdet

Som det antydes i kommissoriet, rummer projektet overordnet set *to tæt forbundne faser* af henholdsvis analytisk og pragmatisk karakter: en akademisk *afklaringsfase* og en pragmatisk *operationaliseringsfase*. Da der er tale om et projekt med et betydeligt undervisningspolitisk islæt, har der, som kommissoriet lader ane, allerede i udgangspunktet været planer om, at dette arbejde følges op af en tredje *implementationsfase*.

1.3.1 Afklaringsfasen

Problemafklaring og komp.beskrivelse som "bærende søjler"

Denne del af projektet har bestået i at analysere spørgsmålene i kommissoriet og heraf afledte problemstillinger, samt i at rapportere resultatet heraf. I struktureringen af dette arbejde har vi i arbejdsgruppen valgt at gøre arbejdet med kommissoriets spørgsmål a) og b) til de to "bærende søjler". Analysen er således bygget op omkring en deskriptiv *problemkarakteristik* og en normativ *kompetencebeskrivelse af matematisk faglighed*.

Problemkarakteristik

Udgangspunkt: "Noget" er ikke som det burde være

Det overordnede udgangspunkt for dette arbejde har været en enighed blandt initiativtagerne og medlemmerne af arbejdsgruppen om, at svaret på kommissoriets spørgsmål a) ikke er: "ingen". "Noget" vedrørende sammenhængen mellem befolkningens faktiske eller ønskværdige matematikkundskaber, og den matematikundervisning som gerne skulle være en hjørnesten i frembringelsen af de sidstnævnte, ser fra vores udkigspost ud til ikke at være, som det burde.

Centrale spørgsmål

Men hvori består det problematiske så? Er de gængse forestillinger, om hvem der bør besidde hvilke slags matematikkundskaber, blevet forældede og trængende til en kritisk revision? Hvis dette er tilfældet, hvilke forandringer af matematikundervisningen og dens rammer bør det så give anledning til? Eller er problemet tværtimod, at disse forestillinger stadig har gyldighed, men at forskellige forhold i eller omkring matematikundervisningen har gjort afstanden mellem de ønskelige kundskaber og de faktisk opnåede for stor? Hvis dette er tilfældet, hvor ligger da de svage punkter? Hvad er årsagerne til dem, hvilken karakter har de, og hvem har mulighed for at gøre noget ved dem? Hvilke tiltag kan tænkes at afhjælpe problemerne, og på hvilke betingelser og med hvilke konsekvenser?

Åben tilgang

Arbejdsgruppen har set det som sin opgave i princippet at betragte alle disse spørgsmål som åbne, uden at tage svarene på nogen af dem for givne. Naturligvis er det ikke realistisk at søge dem alle grundigt afklaret i et projekt som det foreliggende. På internationalt plan er hvert af spørgsmålene genstand for omfattende forskning. Ikke desto mindre har vi som en del af projektet forsøgt at opridse de vigtigste ingredienser i nogle svar på den overordnede problemstilling, sådan som vi mener, den tager sig ud i en dansk sammenhæng, jf. kapitel 10.

Kompetencebeskrivelse

Ingen forventning om "snuptagsløsninger"

Med så komplekse problemstillinger som dem vi her har med at gøre, skal man ikke gøre sig håb om hurtige snuptagsløsninger. Uanset hvilke tiltag man vælger at iværksætte, vil der være tale om at forsøge at påvirke en proces, hvor problemernes karakter, og forestillingerne om hvad der vil være et skridt i den rigtige retning, løbende ændrer sig. I arbejdet har vi derfor bevidst undladt at tage de identificerede problemer op til behandling ét ad gangen med sigte på at opnå svar af typen "hvis bare vi . . . så . . . ".

Komp. som pejlemærke for faglighed

I stedet har vi i arbejdsgruppen valgt at fokusere på at foreslå ændringer på et af de mange områder, som har indflydelse på, hvordan matematikundervisning bedrives. Det drejer sig om, hvordan det indholdsmæssigt set fastlægges, hvad der skal være det styrende for undervisningen. Konkret har vi arbejdet med at benytte en kompetencebeskrivelse af matematisk faglighed som "pejlemærke" for matematikundervisningen. Se nærmere om principperne herfor i kapitel 3 og 4.

Med valget af henholdsvis en problemkarakteristik og en kompetencebeskrivelse af matematisk faglighed som de to "bærende søjler" har resten af afklaringsarbejdet naturligt været styret af to spørgsmål: "Hvordan vil det være fornuftigt at forsøge at indrette sig i nogle af de andre henseender, der har stor betydning for matematikundervisningens praksis, givet at man beskriver 'pejlemærkerne' i kompetencetermer?" og "På hvilke områder og i hvilken udstrækning kan kompetencetilgangen potentielt yde et bidrag til at gøre noget ved de problemer og udfordringer, projektet peger på?"

En bred tilgang

I princippet: Bred tilgang mht. udd.trin. . .

Eftersom projektet angår befolkningens matematikkundskaber over en bred front, har der i afklaringsfasen ikke i udgangspunktet været foretaget nogen afgrænsning af de *uddannelsestrin*, som i særlig grad er relevante for projektet. I princippet har alle uddannelsestrin, fra grundskolens begyndelse til læreruddannelse og universitetsundervisning, været på dagsordenen for arbejdet, inklusive fx erhvervs-, arbejdsmarkeds- og voksenuddannelser. I praksis har vi naturligvis måttet gå mere beskedent til værks og lade os nøje med en behandling af et mindre antal typer af matematikundervisning, udvalgt efter deres vigtighed og deres evne til at være eksemplariske, dvs. repræsentative for en større klasse af matematikundervisning.

. . . samt mht. mat. og mat.uv.

Heller ikke hvad *det indholdsmæssige* angår, har vi i udgangspunktet anlagt en snæver betragtning. I projektet opererer vi således med et bredt begreb om matematik. Det betyder, at vi ikke kun betragter matematik som en rent teoretisk disciplin, men også som en disciplin der anvendes inden for andre fag- og praksisområder og derfor har forbindelser til sådanne, samt som et fag med relationer til kultur og samfund. Derfor omfattes fx statistik og matematikkens historie af det her benyttede matematikbegreb. Også når det gælder undervisning i matematik, anlægger projektet et bredt syn. Vi interesserer os ikke kun for, hvad der traditionelt rubriceres som matematikundervisning, hvad enten den angår matematik som ren eller anvendt disciplin, eller matematik som hjælpefag, men også for hvad man nu og da kalder *matematikholdig* undervisning, dvs. undervisning der *de facto* er undervisning i matematik, men hvor ordet "matematik" af den ene eller den anden grund ikke optræder i overskriften.

I praksis: Fokus på den almene uv.

Også her må vi imidlertid i praksis lade os nøje med at behandle udvalgte aspekter af matematik og matematikundervisning, i det håb at dette vil være til inspiration for de sammenhænge, vi her må lade ligge urørt. At vi således anskuer både "matematik" og "matematikundervisning" bredt, betyder ikke, at vi har forpligtet os til at dække alle manifestationer af matematikundervisning eller matematikholdig undervisning, hvor de end måtte forekomme, kun at vi ikke har begrænset os til at iagttage de traditionelt snævrere betydninger af termerne matematik og matematikundervisning. Hvad uddannelsestrin angår, har vi i praksis hovedsagelig fokuseret på den undervisning, der angår befolkningen som helhed, herunder navnlig skoleundervisningen for børn og unge samt uddannelsen af lærere til disse skoleformer.

1.3.2 Operationaliseringsfasen

Anbefalinger

Denne del af projektet har bestået i, på baggrund af afklaringsarbejdet, at pege på nogle konkrete indsatsområder og at fremsætte forslag til konkrete initiativer, som bør iværksættes inden for disse områder. Hovedpunkterne heri er opsamlet i en række anbefalinger til forskellige aktører og instanser i kapitel 11.

To grøfter: Overdreven generalitet og overdreven detaljeringsgrad

Den relative konkrethed af de fremsatte anbefalinger skal ikke ses som udtryk for en bestræbelse på at levere færdige opskrifter, som blot mangler politisk blåstempling for at kunne føres ud i livet. Arbejdsgruppen har hverken været tænkt eller fungeret som embedsværkets forlængede arm, men som idéproducent og inspirationsskaber. I operationaliseringsfasen har vi således bestræbt os på at finde en passende balance mellem, på den ene side, overdrevent generelle og dermed intetsigende og harmløse anbefalinger og, på den anden side, anbefalinger med en overdreven detaljeringsgrad, som ville have krævet et langt mere velafgrænset og fokuseret udviklingsarbejde, samt for visse uddannelsesområders vedkommende et større detailkendskab, end arbejdsgruppen har kunnet og villet levere.

1.3.3 Implementationsfasen

Videre tiltag i forlængelse af projektet

Om alt går efter planerne, bliver afklarings- og operationaliseringsarbejdet fulgt op af en lang række tiltag, som på forskellig vis forsøger at implementere projektets anbefalinger. Som før nævnt er den praktiske udførelse af denne tredje fase af det samlede matematikundervisningspolitiske “plot” *ikke* en del af dette projekt, som vi fremad vil omtale som *KOM-projektet* (Kompetencer Og Matematiklæring). Ikke desto mindre kan man sige, at implementeringen af projektets idéer og anbefalinger er den vigtigste og den mest omfattende del af hele arbejdet. Den må blot, af flere forskellige grunde, foretages af nogle andre end arbejdsgruppen.

At arbejdsgruppen ikke direkte vil få lod og del i en eventuel implementering af (dele af) de anbefalinger der fremsættes, betyder ikke, at vi som gruppe har forholdt os passivt i forhold til denne del af det samlede uddannelses- og undervisningspolitiske projekt. Tværtimod har ønsket om, fra en vis “flyvehøjde”, at bidrage til en uddannelsespolitisk udviklingsproces været en drivende kraft for arbejdsgruppens engagement i projektet.

Ønske om at bidrage til en udvikling som drivende kraft

Vi er således i en proces, hvor vi på to fronter forsøger at påvirke forløbet af implementationsfasen. For det første har mange ressourcer, som tidligere nævnt, været afsat til at bidrage til at “gøde jorden” for kommende tiltag gennem kontakt med og høring af et stort antal parthavere og interessenter i dansk matematikundervisning. Formålet med dette arbejde er bl.a. at trænge igennem den træthed overfor nye tiltag, som forståeligt nok eksisterer mange steder i uddannelsessystemet, for i stedet gennem en åben og nuanceret dialog at skabe “skvulp i bassinet og ringe i vandet” og få så mange som muligt til at føle sig som del af et fælles projekt, hvor behovet for forandringer mødes med optimisme, gåpåmod og engagement.

Modvirke forsøg på “snuptagsløsninger”

For det andet har der hos både arbejdsgruppen og repræsentanter for de dele af det politisk-administrative system, som skal stå for system- og lovgivningssiden af implementationsfasen, været stor interesse for at drøfte, hvordan dette arbejde kunne og burde foregå. I den meget åbne og konstruktive ånd, som har præget disse diskussioner, har interessen fra arbejdsgruppens side samlet sig om at forsøge at skabe forudsætninger for at undgå de så politisk fristende “snuptagsløsninger”, hvor man alene gennem billige og nemt gennemførlige overfladeændringer, fx på regelniveau, forsøger at påvirke undervisningens realitet og praksis. Sådanne forandringer vil formentlig på længere sigt vise sig virkningsløse, mens de på kort sigt først og fremmest vil bidrage til ændringstrætheden hos dem, der arbejder med matematikundervisning på klasserumsniveau. Derved ville de være direkte skadelige i forhold til mere substantielle reformtiltag.

1.4 Hvad projektet *ikke* går ud på

De foregående afsnit har sigtet på at beskrive, hvad KOM-projektet går ud på, nemlig at levere en tilfredsstillende karakterisering af matematisk faglighed, baseret på matematiske kompetencer, som et middel til at møde nogle udfordringer og behandle nogle problemer. Erfaringen viser, at der desuden kan være grund til at sige noget om, hvad projektet *ikke* påtager sig at være eller gøre, men som man kunne tro, at det indbefattede, og som tillige i sig selv kan være af væsentlig betydning.

Ikke et forskningsprojekt

KOM-projektet er *ikke et forskningsprojekt* i egentlig forstand. Således formuleres der ikke nogen forskningsspørgsmål, som søges besvaret ved en etableret eller nyudviklet forskningsmetodologi. Det betyder imidlertid ikke, at projektet afstår fra fx begrebslige eller andre afklaringer og fra forsøg på systematisk nytænkning. I den forstand kan det bedst karakteriseres som *et analytisk udviklingsprojekt*.

Ikke en samlet matematikdidaktik

På den måde giver KOM-projektet sig fx *ikke* ud for at udgøre – og det skaber heller ikke – en overordnet *matematikdidaktik*, hverken i teoretisk eller i praktisk forstand. Dertil hører der uendeligt meget mere end de afklaringer, som tilbydes i projektet.

Ikke et projekt til begrundelse af mat.uv.'s eksistensberettigelse

Projektet påtager sig *ikke* at levere en sammenhængende stillingtagen til eller *begrundelse af matematikfagets eksistensberettigelse* i uddannelsessystemets forskellige dele, om end aspekter af denne problemstilling strejfes, ikke mindst i kapitel 10. Også dette er af overordentlig betydning og kunne faktisk fortjene et selvstændigt projekt, men netop på grund af omfanget af denne opgave har vi stort set måttet lade den ubehandlet i dette projekt. Det indebærer, at det vedrørende de forskellige trin af uddannelsessystemet, som berøres i projektet, tages som et udgangspunkt, at matematik og matematikundervisning principielt har en eksistensberettigelse. Det, som så kan diskuteres, er, på hvilke vilkår, under hvilke rammer, på hvilken måde, og med hvilken indretning matematikundervisningen skal placeres i den pågældende sammenhæng.

Ikke fokus på dannelse i almindelighed

Projektet går *ikke* ud på at karakterisere eller diskutere *dannelse* i almindelighed eller matematikfagets aktuelle og potentielle bidrag til udviklingen af en sådan. Det er naturligvis af stor betydning at kunne udrede disse forhold, det kan blot ikke finde sted i denne samenhæng.

Ikke fokus på almene komp. og arbejdsmarkedskomp.

I sine forskellige betydninger er ordet "kompetence" i disse år genstand for stor opmærksomhed i mange uddannelsesmæssige, politiske og erhvervsmæssige kredse. Således er der, ikke mindst i uddannelsessystemet, stor interesse for at diskutere diverse former for *almene kompetencer af intellektuel, personlighedsmæssig og social art*. Det drejer sig bl.a. om kompetencer som gåpåmod, arbejdsevne, udholdenhed, selvtillid, evnen til at tage ansvar – fx for egen læring, evnen til at tage stilling, tolerance, samarbejdskompetence, indlevelseskompetence m.m.m. Uagtet disse kompetencers vigtighed, også for udviklingen af matematisk faglighed, er de *ikke i fokus* for dette projekt. Det samme gælder *arbejdsmarkeds- og erhvervskompetencer* af specifik og almen art, som samarbejdsevne, omstillingsparathed, fleksibilitet, it-beredskab, evnen til at begå sig på et eller flere fremmedsprog, osv., sådan som det efterspørges af erhvervslivet og dets organisationer. Også de er vigtige kompetencer, som falder uden for rammerne af KOM-projektet.

Ikke et implementeringsprojekt

Endelig går projektet, som fremhævet ovenfor, *ikke* ud på at forestå *konkrete tiltag til implementering* af idéerne og anbefalingerne i projektet, hverken når det gælder de juridiske, økonomiske og administrative rammer for matematikundervisningen i de forskellige dele af uddannelsessystemet, eller når det gælder konkrete anvisninger vedrørende undervisning, evaluering, tilvejebringelse af undervisningsmidler m.v. I disse henseender "begynder projektet først for alvor, når det er slut".

2 Besvarelse af kommissoriet

2.1 Indledning

Den foreliggende rapport er ikke opbygget i overensstemmelse med spørgsmålene i kommissoriet, idet projektet først – i den i forrige kapitel nævnte afklaringsfase – har bestået i at skabe en struktur på feltet, som kommissoriet i sagens natur ikke kunne ventes at rumme ved projektets begyndelse. Ikke desto mindre er de fleste af kommissoriets spørgsmål i realiteten mere eller mindre direkte behandlet i de følgende kapitler i rapporten. Dette kapitel har til opgave at levere en kort sammenfatning af, hvad vi på denne baggrund mener, vi kan sige i forhold til de enkelte spørgsmål i kommissoriet, jf. afsnit 1.2 (side 15).

Rapporten ikke opbygget efter kommissoriets spørgsmål

Det fremgår uden videre, at disse spørgsmål, taget i deres bredde, dækker et meget stort udsnit af de forhold, der er væsentlige i tilknytning til matematikundervisning. Et fyldestgørende forsøg på besvarelse af dem alle ville indebære års studier og lede til en rapport i mange bind. Det er i erkendelse heraf, at kommissoriet ikke beder om svar på spørgsmålene, men om belysning af dem, jf. afsnit 1.2.

Spørgsmålene belyst, ikke besvaret

2.2 Kommissoriets enkelte punkter

2.2.1 a) I hvilken udstrækning er der behov for at forny den eksisterende matematikundervisning?

Projektets indledende fase, problemafklaringsfasen, hvis hovedresultater er indeholdt i kapitel 10 af denne rapport, tog først og fremmest sigte på at afdække et sæt problemer for, i og med matematikundervisningen i Danmark. Konklusionen på denne fase var, at i adskillige henseender rummer dansk matematikundervisning centrale og bevaringsværdige kvaliteter på alle uddannelsestrin (om end kvaliteternes art varierer fra trin til trin), men at der også er en række problemer og udfordringer, som skaber et behov for fornyelse af visse sider af den eksisterende matematikundervisning.

Meget går godt, men der eksisterer problemer og udfordringer

Begrundelsesproblemer

Vi har identificeret en kreds af problemer relateret til *matematikundervisningens begrundelse*.

Mat.holdige udd. fravælges

Hertil hører det problem, at elever og studerende fravælger matematikholdige uddannelser og uddannelsesgrene i en sådan grad, at der opstår et misforhold mellem de kvalifikationer, børn og unge tilegner sig, og dem, der er brug for i det arbejdsmæssige, offentlige og private liv. Hovedproblemet her er ikke først og fremmest den svigtende rekruttering til matematiske fag i uddannelsessystemet, om end der er en voksende mangel på kompetente matematiklærere i folkeskole og gymnasium, men det forhold at de unge i stort tal fravælger andre slags uddannelser med et markant islæt af matematik. Eftersom dette er et veldokumenteret, internationalt fænomen og problem, kan ikke alle dets årsager være særlige for Danmark. Det forhindrer selvsagt hverken, at de internationale tendenser overlejres eller forstærkes af specifikt danske forhold, eller at der er mulighed for gennem uddannelsessystemet i almindelighed og matematikundervisningen i særdeleshed at modvirke disse tendenser og de problemer, de skaber.

Relevansparadokset

Et andet problem i denne kreds er det såkaldte “relevansparadoks”, som består i misforholdet mellem på den ene side matematikkens objektive, om end oftest skjulte, relevans for samfundets virksomhed, bredt forstået, og, på den anden side, den subjektive irrelevans som mange af matematikundervisningens modtagere føler med hensyn til deres egen beskæftigelse med matematik. Relevansparadokset manifesteres bl.a. som et isolationsproblem for matematikundervisningen, fx når den har vanskeligt ved at blive bragt i samspil med undervisningen i andre fag. Motivationsproblemet – som forstærkes af relevansparadokset, men også har sin egen baggrund og sit eget liv – består i, at mange elever finder arbejdet med matematik kedeligt, menings- eller perspektivløst, eller blot for krævende i forhold til de forventelige gevinster ved arbejdet.

Truslen mod “mat. for alle”

Det sidste af begrundelsesproblemerne er den gradvis voksende trussel mod “matematik for alle”, der især ses i lande som USA, Japan, Tyskland og i mere spredt form i Norge og Sverige, men som også vinder frem i Danmark. I nogle kredse i samfundet sættes simpelthen spørgsmålstegn ved, om matematikkundskaber og matematiske kompetencer nu virkelig er så vigtige for hele befolkningen. Er det ikke nok, at sådanne kundskaber og kompetencer kun besiddes af et mindretal – mens resten kan klare sig med matematik formidlet og camoufleret af brugervenlige IT-systemer? I andre kredse, hovedsagelig blandt visse matematikere og naturvidenskabsfolk, er der snarere skepsis over for, at “for alle” betyder “for alle og *sammen*”, idet frygten i disse kredse er, at “de svage” i henseende til tilegnelsesevne og motivation skal trække matematikundervisningen ned på et niveau, hvor den trivialiseres, så den ikke appellerer til eller giver tilstrækkeligt udbytte for “de stærke”. Derved får ingen af parterne noget ud af matematikundervisningen, og samfundet får ingen, som besidder tilstrækkelige matematiske kompetencer. Uanset hvilken holdning man indtager til disse trusler mod “matematik for alle”, giver de anledning til alvorlige udfordringer til dansk matematikundervisning og dens selvforståelse.

Implementationsproblemer

Den anden kreds af problemer, som er taget op i denne rapport, har vi samlet under overskriften *implementationsproblemer*.

Mat.lærernes kvalifikationer

Det første blandt disse knytter sig til matematiklærernes kvalifikationer. Selv om det mest karakteristiske ved de forskellige stænder af matematiklærere er den meget store spredning, som findes inden for hver stand, må det ses i øjnene, at der, hvis man ser på gennemsnittet, er rum for forbedring af lærernes kvalifikationer, inklusive deres holdninger, enten i faglig henseende, eller i didaktisk-pædagogisk henseende eller i begge. Det gælder, hvad enten man ser på folkeskolelærere, diverse kategorier af lærere i ungdomsuddannelserne eller på matematiklærere på de videregående uddannelser.

Sammenhæng, overgange og progression

Vi har også blandt implementationsproblemerne hæftet os ved sammenhængs-, overgangs- og progressionsproblemer i matematikundervisningen. Sammenhængsproblemet består i, at det fag, der bærer navnet matematik, i virkeligheden er så forskelligt tænkt, fortolket og realiseret i de forskellige afsnit af uddannelsessystemet, at det kan være svært at få øje på, hvad der er fælles for faget. For de elever, der i forskellige perioder i deres liv skal opholde sig i forskellige uddannelsesafsnit, giver dette anledning til forvirring og orienteringsvanskeligheder. Af særlig styrke er disse problemer, når det gælder overgangen fra et afsnit til et andet (fx fra folkeskole til gymnasiale uddannelser, eller fra gymnasiale uddannelser til videregående uddannelser), hvor der ofte opstår betydelig usikkerhed både hos elever og lærere, spild af mentale og andre ressourcer, svækkelse af motivation og interesse osv. Problemet med at opnå tilstrækkelig progression i matematikundervisning og -tilegnelse, både mellem og inden for uddannelsesformerne, hører hjemme i denne kontekst.

Spredningen i elevernes udbytte

Et andet implementationsproblem er problemer med spredningen i det udbytte, eleverne opnår ved undervisningen på et givet trin. Denne spredning er i dansk matematikundervisning ganske betydelig. Ud over at dette giver anledning til et problem med at fastholde et ensartet niveau for målgruppen for undervisningen, giver spredningen anledning til, hvad vi kalder et deklarationsproblem, som opstår ved "migration" på langs eller tværs i uddannelsessystemet, hvor modtagerne af de forskellige dimittendgrupper ikke ved, hvad de kan forvente af den matematiske bagage hos de elever, de modtager.

Undervisningsdifferentiering

Også de problemer, der forefindes ved den undervisningsdifferentiering, som praktiseres i uddannelsessystemet, rubriceres som et implementationsproblem. Uanset hvilke forestillinger og hensigter man har med undervisningsdifferentiering (begrebet dækker i virkeligheden over flere forskellige, og på nogle punkter modstridende, ting), må der konstateres problemer med at skabe klare rammer og tilstrækkelige ressourcer til at virkeliggøre differentieringen. Og ønsket, men mislykket undervisningsdifferentiering er et problem i sig selv.

Evaluering

De sidste problemer, vi fremdrager i denne problemkreds, knytter sig til evaluering. Her peger vi dels på disharmoniproblemet, der består i, at mange af de traditionelt benyttede evalueringsformer kun i begrænset grad tillader evaluering af de matematiske kundskaber og kompetencer, man egentlig ønsker at fremme i matematikundervisningen. Dels fremhæver vi det mere dybtliggende fortolkningsproblem, som omfatter de ganske store vanskeligheder, der er ved at sikre sig, at de evalueringsformer, som faktisk benyttes, både tillader og udnyttes til en holdbar afdækning af elevernes matematiktilegnelse og -beherskelse.

"Svaret"

Fornyelse der adressérer de nævnte problemer

Det ovenstående skal ikke gøre det ud for en udtømmende kortlægning af problemerne for, i og med matematikundervisningen i Danmark. Men de fremdragne problemer er efter arbejdsgruppens opfattelse blandt de vigtigste. Heraf følger så det koncise svar på spørgsmål a): *Der er behov for at forny den eksisterende matematikundervisning på en sådan måde og i en sådan udstrækning, at de ovenfor nævnte problemer kan løses eller reduceres betragteligt.* De foreslåede midler til en sådan fornyelse er omtalt i kapitel 11, som rummer KOM-projektets anbefalinger.

2.2.2 b) Hvilke matematiske kompetencer skal der være opbygget hos eleverne på de forskellige stadier af uddannelsessystemet?

Svaret på dette spørgsmål udgør indholdet af denne rapports del III og VII. I betragtning af uddannelsessystemets omfang og mangfoldighed kan svaret kun opsummeres i generel form, nemlig som følger.

Alle otte mat.komp. på dagsordenen fra uv.´s begyndelse

Fra begyndelsen af formaliseret matematikundervisning sættes alle otte matematikkompetencer – jf. kapitel 4 – på dagsordenen for undervisningen. Det er en afgørende pointe i KOM-projektet, at dette sker, idet det er en hovedidé at benytte kompetencerne til at skabe en fælles referenceramme for al matematikundervisning. Til gengæld er det i begyndelsen kun visse af de karakteristiske træk ved den enkelte kompetence, der tages i betragtning. Op igennem uddannelsessystemet forudsættes gradvis flere træk af hver kompetence tilføjet elevens kompetencebesiddelse. Ved udgangen af det gymnasiale A-niveau skal hver kompetence i fuld udfoldelse være i elevens besiddelse. Det samme er tilfældet med de matematiktunge videregående uddannelser, herunder uddannelserne til matematiklærer for børn, unge eller voksne. I den forbindelse forudsættes det altså også, at universiteternes kandidat- og bacheloruddannelser i matematik, til forskel fra hvad der ofte har været tilfældet, sigter mod at udvikle modellerings-, kommunikations- og hjælpemiddelkompetence. Hvad angår de ikke-matematiske, men matematikforbrugende uddannelser, som findes efter den almene skolegang, forventes igen

Løbende udvikling

I lærerudd. og fra A-niveau og frem forventes komp. fuldt dækkede kun visse af kompetencerne at indgå i den matematiske bagage, som eleven eller den studerende søges udstyret med. Særlig vægt lægges her på modelleringskompetencen, og på hvad der i øvrigt skal til for at begå sig med matematik i ekstramatematiske forbindelser.

Der kan være grund til en særlig bemærkning vedrørende de mange erhvervsuddannelser, samt korte og mellemlange videregående uddannelser, som ikke i sig selv sigter mod at udvikle matematiske kundskaber hos deres elever og studerende, og som måske heller ikke leverer nogen undervisning under overskriften "matematik", men som ikke desto mindre betjener sig af eller de facto udvikler matematiske kompetencer. I denne rapport er gastronom-, elekriker- og datamatikeruddannelserne repræsentanter for denne store klasse af uddannelser. Det er her vores konklusion, at det vil være didaktisk og pædagogisk nyttigt at bringe selve det forhold, at disse uddannelser faktisk trækker på matematiske kompetencer, frem i lyset, ligesom det bør artikuleres, hvilke kompetencer der nærmere bestemt er tale om.

Nyttigt at belyse mat.indholdet i erhvervsudd.

Mens kompetencerne i sig selv er på færde i hele uddannelsessystemet, er den måde, de manifesteres på i konkrete matematiske aktiviteter, meget varierende fra sted til sted, ikke mindst når det gælder samspillet med fagligt stof, sådan som det er behandlet i rapportens del IV. Der er uden tvivl også tale om, at vægtfordelingen mellem kompetencerne varierer med trin og sted.

Komp. og fagligt stof

På nogenlunde lignende vis forholder det sig med de tre former for overblik og dømmekraft vedrørende matematik som fagområde. Overblik og dømmekraft vedrørende henholdsvis matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder og matematikkens karakter som fagområde er i princippet på færde fra matematikundervisningens begyndelse, men selvsagt på måder, der er tilpasset perspektiverne for de respektive uddannelsestrin, samt kompetencerne og det faglige stof, som undervisningen beskæftiger sig med. Overblik og dømmekraft vedrørende matematikkens historiske udvikling tænkes at indgå på et senere stadium i uddannelsesforløbet. Inden for de før omtalte erhvervsrettede uddannelser har det dog næppe mening at søge at udvikle overblik og dømmekraft vedrørende matematik som fagområde, ud over hvad der ligger i at gøre det klart for eleverne, at erhvervet faktisk indebærer og forudsætter visse matematiske kompetencer.

Tre former for overblik og dømmekraft

2.2.3 c) Hvordan sikrer man progression og sammenhæng i matematikundervisningen gennem hele uddannelsessystemet?

Forudsætter vi et øjeblik, at vi ved, hvad der skal menes med progression og sammenhæng i matematikundervisningen, er én forudsætning afgørende, hvis progression og sammenhæng i matematikundervisningen gennem *hele* uddannelsessystemet skal sikres. Det er, at matematikundervisningsaktørerne – dvs. centrale og lokale myndigheder, lærere, læreruddannere, læremiddelsproducenter osv. – tænker på det samme fag, når de taler om matematik, og ikke kun på en ydre etiket, og at de opfatter deres opgave som værende på hver deres måde at bidrage til, at børn og

Nødvendigheden af mentalt fællesskab

unge op igennem uddannelsessystemet udvikler og udbygger deres matematiske kompetence. Med andre ord er det centralt, at matematikundervisningens aktører alle betragter sig som del af det samme overordnede undervisningsprojekt og ikke som aktører i en række adskilte projekter, der enten ikke har noget særligt med hinanden at gøre, eller som direkte kan komme hinanden på tværs. At skabe et sådant mentalt fællesskab er en mangesidet sag, der har at gøre med strukturelle og organisatoriske forhold, med faglige og professionsmæssige traditionsforskelle, og med arbejds- og lønvilkår m.m.m. Flere af disse forhold har ikke noget specielt med matematikundervisning at gøre og ligger derfor helt uden for rækkevidde af et projekt som det foreliggende.

Den for sammenhæng nødvendige følelse af fællesskab og samarbejde

Nyere eksempler på fællesskabsfremmende foranstaltninger

Inden for projektets rækkevidde er det derimod at bidrage på andre måder til skabelsen af det omtalte mentale fællesskab blandt folk, der er professionelt engagerede i matematikundervisning, uanset trin. I de senere år er der i Danmark sket en række tiltag, der på det organisatoriske plan har bidraget til at bringe matematikundervisningsfolk fra de fleste dele af uddannelsessystemet sammen. Man kunne nævne Danmarks Matematikundervisningskommission, Forum for Matematikkens Didaktik, arbejdet med at forberede Verdensmatematikåret 2000 i Danmark, projektet "Matematik og naturvidenskab i verdensklasse" vedrørende folkeskolen og gymnasiet i hovedstadsområdet, og arbejdet med at forberede ICME-10 – den tiende verdenskongres for matematikundervisning og matematikkens didaktik, som skal finde sted i København i 2004 – som nyere eksempler på fællesskabsfremmende foranstaltninger. Disse tiltag kan KOM-projektet visselig ikke tage æren for. Men de er et udtryk for, at der er en stigende forståelse for vigtigheden af fællesskab og samarbejde, samt en voksende grobund for begge dele. KOM-projektet i sig selv har, med dets kontakter til alle lag i uddannelsessystemet, været en vigtig accelerator og katalysator i samme retning.

Oprettelsen af lokale kontaktorganer tiltrængt

I anbefalingerne i kapitel 11 har vi yderligere foreslået en række tiltag, som har til formål at styrke det mentale og organisatoriske fællesskab i matematikundervisningen, ikke mindst i sammenhæng med overgangen mellem de store afsnit af uddannelsessystemet, fra folkeskole til ungdomsuddannelser og fra ungdomsuddannelser til videregående uddannelser, hvor vi har anbefalet oprettelsen af diverse lokale organer til varetagelse og fremme af kontakt mellem uddannelsessystemets dele.

Sådanne forbedrede muligheder for at etablere mødesteder mellem mange slags matematikundervisere danner en tiltrængt, for ikke at sige nødvendig, platform for at skabe den omtalte bevidsthed om matematikundervisningen som et fælles projekt. Det næste spørgsmål er så, hvordan dette kan videreføres i en fælles forståelse af, hvad det fælles projekt nærmere går/skal gå ud på. KOM-projektets bud på det er, at projektet skal gå ud på at bibringe matematikundervisningens modtagere på alle trin de i denne rapport omhandlede matematiske kompetencer og former for overblik og dømmekraft.

Forståelsen af sammenhæng

Den måde, hvorpå progression og sammenhæng herefter skal forstås og beskrives, er så hæftet op på disse kompetencer m.v. Sammenhængen består i, at det er de samme kompetencer, som efterstræbes overalt i uddannelsessystemet, således at matematikfaget ikke falder i en række ret forskellige fag, bundet sammen af den samme overskrift. Sammenhængen består endvidere i, at det er de samme ti matematiske stofområder, hvorfra det matematiske stof skal hentes, som foreslås gjort til genstand for undervisningen fra folkeskole til indledende videregående undervisning. Som fremhævet mange gange i denne rapport manifesterer kompetencerne sig forskelligt på de forskellige trin, ligesom den nærmere realisering af de matematiske stofområder selvsagt er bestemt af trinnet.

Progression i den enkeltes matematikbeherskelse

Progression i matematikbeherskelse og -undervisning

Hvad progression i den enkeltes matematik*beherskelse* angår, består den dels i tilvækst af matematisk kompetence, overblik og dømmekraft, dels i indvinding af nyt land vedrørende de matematiske stofområder, den enkelte bliver i stand til at begå sig i og med. Kompetencerne udvikles og udøves i beskæftigelsen med matematiske stofområder. I dette projekt foreslår vi at detektere og fremme progression i den enkelte matematiske kompetence ved at fokusere på dens vækst i tre dimensioner, nemlig dækningsgrad, aktionsradius og teknisk niveau, jf. afsnit 4.4.4 (side 64). Ses udviklingen af henholdsvis aktionsradius og det tekniske niveau for samtlige kompetencer under ét, fås en tæt kobling mellem kompetenceudvikling og indvinding af nyt land vedrørende matematiske stofområder. Progression i matematik*undervisningen* bliver derved synonymt med det at skabe progression i den enkeltes matematikbeherskelse, som netop beskrevet. Såvel progression i matematikbeherskelse som i matematikundervisning bliver altså den samme sag inden for, og på langs af, de enkelte udsnit af uddannelsessystemet, og dermed også hen over de sektorielle og institutionelle grænser, som uddannelsessystemet rummer.

Vedr. spørgsmålet om "hvordan"

Forstås progression på denne måde, bliver det pædagogiske hovedspørgsmål, hvordan man konkret kan tilrettelægge en matematikundervisning, der fremmer den. Her bliver KOM-projektet nødt til at lade sig nøje med et par generelle betragtninger, idet en mere indgående behandling af dette spørgsmål for alle de relevante uddannelsestrin ville række langt ud over projektets rammer.

For det første er det vores opfattelse, at udnyttelsen af selve den her præsenterede kompetencetænkning overalt i matematikundervisningen, ikke mindst i dens hverdag, i sig selv vil være et første skridt til fremmelse af progression i undervisningen, alene ved at øge opmærksomheden om forehavendet.

For det andet vil udnyttelsen af denne tankegang i planlægningen, tilrettelæggelsen og gennemførelsen af undervisningen kunne bidrage til orkestrering af undervisnings- og læringsaktiviteter, som udtrykkeligt har til formål at udvikle den enkelte elevs matematiske kompetencer. Uden at vi her skal forsøge at gå i detaljer, lader det sig uden videre hævde, at der, som orkestermetaforen også lægger op til, er brug for en righoldig mangfoldighed af sådanne aktiviteter, der hver på sin måde, på sit sted og til sin tid kan bidrage til udvikling eller konsolidering af nogle af matematikkompetencerne.

For det tredje vil tilretningen og konstruktionen af evalueringsformer og -instrumenter, som sigter mod – og egner sig til – at detektere, karakterisere og bedømme matematiske kompetencer, tjene til at fremme den enkeltes kompetenceudvikling, men også til at skabe input til justering af selve undervisningen, så den i højere grad fremmer progression.

2.2.4 d) Hvordan måler man matematiske kompetencer?

Statisk og dynamisk måling i tre dimensioner

Udgangspunktet for måling, dvs. detektering, karakterisering og også bedømmelse af en matematisk kompetence, er de flere gange omtalte tre dimensioner ved kompetencen: dækningsgrad, aktionsradius og teknisk niveau. Som nærmere omtalt i kapitel 9 er dette midlet både til en statisk tilstandsbeskrivelse og en dynamisk udviklingsbeskrivelse. Med andre ord går en statisk eller dynamisk måling af en kompetence ud på at måle dens dækningsgrad, aktionsradius eller tekniske niveau.

Hvordan?

Men selv om det nu i princippet er klarlagt, *hvad* der skal måles, er det ikke dermed sagt, *hvordan* det kan/skal måles, dvs. under hvilke omstændigheder og med hvilke instrumenter målingen kan udføres. Store dele af kapitel 9 er viet en gennemgang af henholdsvis veletablerede, nyere og endnu knap nok eksisterende evalueringsformer og -instrumenter, som enten kan benyttes til summativ evaluering i form af prøver og eksamener ved afslutningen af et uddannelseafsnit eller en uddannelse, eller som læreren kan benytte til formativ evaluering undervejs i matematikundervisningen, i begge tilfælde med de matematiske kompetencer som evalueringsgenstand.

Et bredt spektrum af redskaber er nødvendigt

Det bliver her dels konkluderet, at intet enkelt evalueringsredskab er tilstrækkeligt til at indfange hele spektret af kompetencer (eller de tre former for overblik og dømmekraft). Et bredt spektrum af redskaber er nødvendigt. Det konkluderes endvidere, at størstedelen af de gængse evalueringsformer og -instrumenter faktisk egner sig til at evaluere nogle af kompetencerne, og til sammen ganske mange af dem, forudsat at de "bygges om" og orienteres til specifikt at sigte på de relevante kompetencer. Det kræver et ikke forsvindende, men ikke desto mindre overkommeligt, tilretnings- og udviklingsarbejde at bringe det i stand. Endelig konkluderes det, at skønt man med tilretning af de kendte evalueringsredskaber kan komme et ganske langt stykke vej med at evaluere kompetencerne, er der fortsat behov for at udvikle nye redskaber til brug for evaluering af disse, ikke mindst i forbindelse med det, diverse spektra af undervisnings- og aktivitetsformer, moderne matematikundervisning betjener sig af.

2.2.5 e) Hvilket indhold skal der være i et tidssvarende matematikfag?

Indhold som en kombination af kompetencer, stofområder og konkret indhold

Det er et af udgangspunkterne for KOM-projektet, at indholdet af et tidssvarende matematikfag ikke udelukkende kan karakteriseres ved hjælp af det faglige stof, matematikundervisningen omhandler. Indholdet består også i de kompetencer og i de former for overblik og dømmekraft, som sættes på dagsordenen for undervisning og læring, samt i det konkrete indhold, også af ekstra-matematisk art, som indgår i de objekter, fænomener, situationer, problemer, spørgsmål osv., som behandles i undervisningen.

Det indebærer imidlertid ingenlunde, at faglige stofområder er af sekundær betydning for matematikundervisningen. Således vil enhver udvikling og udøvelse af matematiske kompetencer finde sted i omgangen med faglige stofområder. Her har arbejdsgruppen peget på ti matematiske stofområder, som må danne den matematikstoflige grundstamme i størstedelen af matematikundervisningen fra indskoling til det første år eller to af universiteternes matematikstudier. Det forhindrer ikke, at der i forskellige sammenhænge kan være mening i eller brug for at inddrage andre stofområder. Dette er naturligvis navnlig tilfældet på videregående uddannelsestrin. Denne problemstilling har vi ladet ligge i dette projekt.

Ti stofområder

De ti stofområder er *talområderne*, *aritmetik*, *algebra*, *geometri*, *funktioner*, *infinitesimalregning*, *sandsynlighedsregning*, *statistik*, *diskret matematik* og *optimering*. I rapportens del IV er der foretaget en nærmere karakterisering, i overordnede termer, af indholdet i de ti stofområder, ligesom der er gjort rede for forbindelsen mellem disse stofområder, kompetencerne og uddannelsestrin i et tre-dimensionalt kasseskema, som ikke mindst tjener til at slå fast, at der er tale om tre helt forskellige akser, som bringes i samspil.

Klassiske overskrifter og afgrænsninger

Stofområderne er med vilje valgt med ret klassiske overskrifter og afgrænsninger, bl.a. for at skabe overensstemmelse med den måde, matematikkens stofarkitektur nu engang har udviklet sig og er konstitueret på. Vi har altså ikke ønsket at bevæge os ind på den vej, som diverse udenlandske (frem for alt angelsaksiske) læreplansprojekter har betrådt, nemlig at erstatte traditionelle matematiske stofområder med overgribende tematiske eller fænomenologiske kategorier, som fx "rum", "form og mønstre", "forandring og vækst", "måling" osv. Sådanne kategorier kan være værdifulde i bestemte, afgrænsede forbindelser, fx i relation til en bestemt skoleform, men er næppe så nyttige, når man forsøger at identificere stofområder, som kan gøres gældende på mange, i øvrigt forskelligartede, uddannelsestrin.

"Anvendelsestoning" i valget af stofområder

En anden ledetråd for valget af stofområder er, at disse skulle afspejle det forhold, at størstedelen af den matematikundervisning, der gives i Danmark, i en eller anden forstand har – og bør have – et anvendelsesorienteret sigte. Et tidssvarende matematikfag, som ikke henvender sig til en snæver kreds af teoretiske specialister, må tage dette alvorligt. Det har ført til, at vi ud over basale internt matematiske stofområder har lagt vægt på sådanne, som enten direkte i deres teoribygning er motiveret af anvendelsesspørgsmål (det gælder sandsynlighedsregning, statistik og optimering), eller som er af central betydning for anvendelsen af matematik i andre fag- eller praksisområder (fx aritmetik, aspekter af geometri, aspekter af funktioner, infinitesimalregning og diskret matematik).

Stofområderne som grundliste for fastlæggelsen af det nærmere ønskede stof

At de ti stofområder er valgt som dækkende for størstedelen af matematikundervisningen, betyder ikke, at alle stofområder, eller alle de nærmere omtalte sider af et givet stofområde, foreslås programsat for alle de berørte uddannelsestrin. For eksempel anser vi det ikke for meningsfuldt at forlange, at algebra som eksplicit behandlet stofområde skal optræde før på grundskolens afsluttende trin (7.–9. klassetrin), eller at infinitesimalregning skal optræde i grundskolen eller i grundskolelæreruddannelsen.

Ikke for stor detaljering i fastlæggelsen

Pointerne er, at de ti stofområder danner en grundliste, hvorfra det nærmere ønskede stof på et givet trin skal hentes. I den forbindelse har arbejdsgruppen anset det for afgørende for et tidssvarende matematikfag, at der ikke – på noget undervisningstrin – sker en for stor detaljering af de stofkomponenter, som skal indgå i undervisningen. Stofvalget bør – for ikke at modarbejde de bærende hensigter og idéer med det foreliggende projekt – ske med en ret høj grad af sammenfatning. Blandt de former for modarbejdelse, som overdreven detaljering i stoffastlæggelsen erfaringsmæssigt kan frygtes at bevirke, er stoftrængsel og ansvarsforflygtigelse blandt matematikundervisningens udøvere.

2.2.6 f) Hvordan sikrer man, at der sker en løbende udvikling af matematikfaget og matematikundervisningen?

Fremme følelsen af et fælles projekt er en del af svaret

Dele af svaret på dette – meget omfattende – spørgsmål er allerede givet i svaret på spørgsmål c): Man skaber vilkår, omstændigheder og organisatoriske rammer, der fremmer, at alle matematikundervisningens aktører ser sig selv som parthavere i et fælles projekt, uanset uddannelsestrin. Det forudsætter skabelse af platforme og bastioner, bl.a. som foreslået i kapitel 11, som kan sikre erfarings- og idéudveksling, muligheder og ressourcer for udviklingsarbejde, forsøgsvirksomhed osv.

Bedre forbindelse mellem forskning og praksis

Bedre forbindelser mellem forskning og praksis

Af særlig betydning er det her at få skabt langt bedre forbindelser mellem matematikundervisningens praksis og den matematikdidaktiske forskning i landet. Sådanne forbindelser skal ikke bestå i, at matematiklærere skal gøres bekendt med forskningens resultater og sættes til at omsætte dem til praksis. Kun sjældent fører matematikdidaktisk forskning til direkte omsættelige, positive resultater.

Inspiration fra andre lande

Opgaven består snarere i at skabe forbindelser, centreret om konkrete forsknings- og udviklingsarbejder mellem nogle lærere og nogle forskere. Vellykkede eksempler på sådanne arbejdsfællesskaber mellem praktikere og forskere kendes fx fra

Frankrig (de såkaldte IREMer), Italien (de såkaldte NRDMer) og punktvis i USA. Ud over at være personligt givende for de direkte involverede er hovedudbyttet af sådanne aktiviteter, at der skabes "dønningseffekter" i både de berørte uddannelsesinstitutioner og forskningsmiljøer, derved at andre lærere og forskere får inspiration til deres virke fra aktiviteterne.

Gode muligheder for matematiklæreres efter- og videreuddannelse

Efter- og videreudd.

Derudover giver det sig selv, at righoldige og tilstrækkelige efter- og videreuddannelsesmuligheder, konferencedeltagelse osv. for lærere på alle trin er essentielle, såvel for løbende udvikling af matematikfaget og matematikundervisningen i det hele taget, som i forhold til de perspektiver, der er fremdraget i dette projekt. Hvad det sidste angår, peger vi i kapitel 11 på, at det, alt andet lige, vil være mere virksomt for realiseringen af tankerne i – fx – dette projekt at satse kræfterne og ressourcerne på bedre grunduddannelse, samt efter- og videreuddannelse af lærerne, end på en øgning af timetallet for matematikundervisning i eksempelvis folkeskolen, selvom dette naturligvis kunne give matematikundervisningen mere udfoldelsesrum.

Udvikling bæres af lærerne

En vigtig grund til, at der på mange forskellige måder bør satses på at forbedre og udvikle lærernes arbejdsbetingelser, bredt set, er, at dette er forudsætningen for at lærerne føler sig respekteret og taget alvorligt af det politiske og administrative system. Gør de ikke det, er det umuligt at sikre en løbende udvikling af matematikfaget og matematikundervisningen, eftersom en sådan udvikling nødvendigvis må bæres af lærerne.

Reformer der respekteres af og involverer matematiklærerne

Reformer udelukkende dikteret fra oven er uden chance

KOM-projektet har investeret meget arbejde i at være et projekt, som var i løbende dialog og udviklingskontakt med mange slags matematikundervisningsaktører fra alle dele af uddannelsessystemet. Ud over at dette tænktes at bidrage til et bedre projekt, end tilfældet ellers ville have været, var denne fremgangsmåde et bevidst ønske om ikke at blive et "oppefra-og-ned-projekt". Det er uden tvivl en kendsgerning, at reformer, der alene sættes i værk ved diktat fra oven, nærmest ingen chance har for at slå igennem på andet end helt udvendige måder. Hvis ikke tilstrækkeligt mange af matematikundervisningens aktører føler medejerskab til en reform, er der endeløst mange forskellige måder, den reelt kan gå i vasken på, uden at det sker formelt.

Lærernes medejerskab og medvirken som nødvendig betingelse

Vi anser det derfor for at være en hovedsag, at enhver fremtidig reform finder sted på måder og i et tempo, som opnår lærernes faglige og procesmæssige respekt, tiltro, medejerskab og aktive medvirken, med mindre man da har til hensigt at udskifte hele korpset. Der er her tale om en nødvendig, ikke om en tilstrækkelig betingelse for en vellykket udvikling af matematikfaget og matematikundervisningen. Dette er ikke et spørgsmål om at stryge lærerne med hårene, men om at se realiteterne i øjnene. Hvilket hermed er anbefalet.

2.2.7 g) Hvad er samfundets krav til matematikundervisningen?

Overordnet set tre krav

Samfundets krav til matematikundervisningen er dels eksplicitte, dels implicitte, og ofte ligefrem ubevidste. I kort form har samfundet overordnet set tre forskellige hensigter med, og dermed krav til, matematikundervisningen (jf. afsnit 10.2).

Den skal bidrage til den teknologiske og socio-økonomiske udvikling af samfundet som helhed. Den skal udstyre individer med værktøjer, kvalifikationer og kompetencer, som kan hjælpe dem til at klare livets (ud)fordringer, som privatpersoner, i arbejdslivet og som samfundsborgere. Den skal bidrage til samfundets politiske, ideologiske og kulturelle vedligeholdelse og udvikling i Danmark i et demokratisk perspektiv.

Mulige indbyrdes konflikter

På det overordnede plan går disse hensigter udmærket i spænd med hinanden, og de kan endda ses som gensidigt forstærkende. Men når man på et konkret og pragmatisk plan skal omsætte dem i indretning af matematikundervisningen, kan de godt komme på tværs af, eller måske sågar i konflikt med, hinanden. Det sker især, hvis der skal foretages afvejninger og prioriteringer mellem forskellige hensyn og indsatser. Ønsker en sektor i samfundet fx at uddanne en arbejdskraft, som på et snævert område med hurtighed og sikkerhed kan udføre visse matematiske operationer af rutinemæssig karakter – det der af nogle er blevet kaldt “den levende regnemaskine” – og ønsker matematikundervisningen indrettet og gennemført, så denne opgave står i centrum, er det lidet sandsynligt, at den samme undervisning kan indløse den opgave at bidrage til uddannelsen af borgere, som på et vidende, tænksomt og analytisk grundlag kan forholde sig kritisk til brug og misbrug af matematik af betydning for samfundsmæssige beslutninger.

Dansk tradition for at vægte alle tre krav

I Danmark har det imidlertid i en del år været et udtrykkeligt ønske fra samfundet – repræsenteret ved det politiske og administrative system samt de store organisationer på arbejdsmarkedet – at tillægge alle tre hensigter vægt. På det udtrykkelige niveau, som det fx ses afspejlet i nedskrevne læseplansformål m.v., har det især været de to sidste hensigter, som i nyere tid har været artikuleret, selv om man let kan vise, at erhvervslivet og det politiske system også ofte slår på den først anførte hensigt. Dette har ikke mindst været synligt i de seneste par årtier, hvor der har været utilstrækkelig tilgang til matematiktunge uddannelser, som samfundet, og her ikke mindst industrien, efterspørger, jf. kapitel 10.

Mange forventninger til mat.uv.

Dette betyder, at samfundet kræver af matematikundervisningen, at den er velfungerende nok til at engagere eleverne, så de motiveres til at påtage sig den opgave, det er at tilegne sig matematik, og til at vælge uddannelsesveje, som indebærer en eller anden form for beskæftigelse med matematik. I den forbindelse kræver samfundet, at matematikundervisningen bedrives, så den ikke giver for meget frafald, enten derved at den af for mange forlades "i utide", eller ved at for mange ikke består prøver og eksamener. Samfundet kræver videre, at matematikundervisningen til enhver tid er effektiv nok til at forsyne elever og studerende med de kvalifikationer og matematiske kompetencer, som efterspørges på arbejdsmarkedet – uden at det altid står klart, hvad disse nærmere består i. I disse år er der fx kredse i samfundet, som beder om mål- og dokumenterbare færdigheder af en nok så reduceret art, samt korte og letforståelige deklarationer af hvad eleverne "kan". Til andre tider efterspørges først og fremmest forståelse, indsigt, kreativitet og kritisk sans. Samfundet kræver tillige, at matematikundervisningen forsyner børn og unge med kundskaber og færdigheder, som gør, at de kan stå sig i internationale sammenligninger – navnlig i forhold til de andre nordiske lande – på en måde, der svarer til de nationale ambitioner i kombination med den nationale selvforståelse. Samfundet kræver også, at matematikundervisningen skal bidrage til uddannelsen af aktive, medlevende, selvstændige, stillingtagende og kritiske samfundsborgere. Samfundet kræver endelig, at matematikundervisningens modtagere trives ved den og er glade for den.

Utydelige signaler om indbyrdes afvejning

Dette er mange og forskelligartede krav, som det nok kan være vanskeligt at honorere inden for én og samme matematikundervisning. Det siger derfor sig selv, at det ikke lader sig gøre at fremsætte enkle anvisninger på, hvordan det skal ske. Når samfundet ikke afgiver særligt tydelige signaler om, hvordan disse krav skal afvejes i forhold til hinanden, skyldes det naturligvis, at det danske samfund ikke er en enhedsorganisme med ét overordnet hoved som kommandocentral for samfundslegemet. Der er forskellige interesser, betoninger og prioriteringer, som skiftevis brydes og sameksisterer i et samfund som vort. Derfor må matematikundervisningssystemet selv forsøge at tage bestik af signaler, vilkår og omstændigheder i sine bestræbelser på at udmønte dem i rammer og realiseringer af de forskellige slags matematikundervisning, som findes i samfundet.

Komp.tænkning som middel til at artikulere hensigter

Det er her arbejdsgruppens opfattelse, at kompetencetænkningen kan bidrage til på en klarere vis end hidtil at artikulere hensigter med, krav til og prioriteringer i matematikundervisningen, sådan at beslutninger og foranstaltninger kan træffes og iværksættes på gennemtænkte og velforståede måder. Der er i den forbindelse tillige grund til at tro, at en del af de ufrugtbare og falske modstillinger, som man kan træffe på i sammenhæng med matematikundervisning, kan fjernes eller mindskes under inddragelse af en sådan tankegang.

2.2.8 h) Hvordan ser fremtidens undervisningsmaterialer i matematik ud?

Ikke indgående behandlet i KOM-projektet

Arbejdsgruppen har ikke kunnet behandle dette spørgsmål særligt indgående. Det rummer så mange kommunikationsmæssige, teknologiske, mediemæssige og kommercielle aspekter, at det kalder på en selvstændig undersøgelse. Noget lader sig dog sige på KOM-projektets grundlag.

Forandring er nødvendigt

Skal de idéer og forslag, som projektet rummer, føres ud i livet, kræves forandringer af mange af de materialer, som er til rådighed for undervisningen. Således egner gængse lærebøger sig kun – ved traditionel brug – til at fremme udviklingen af en begrænset del af de matematiske kompetencer, som fremhæves i dette projekt, alene fordi de ikke er orienteret mod at operere i disse baner.

Sigte på udvikling af komp.spektret

Udviklingen af matematiske kompetencer, og af overblik og dømmekraft vedrørende matematikken som fagområde, finder sted gennem aktiviteter, der har denne udvikling som udtrykkeligt sigte. Sådanne aktiviteter forudsætter på deres side adgang til en righoldig fond af meget forskelligartede undervisningsmidler, som læreren kan betjene sig af til orkestrering af sin undervisning, og som eleverne kan gå til på egen hånd under udførelsen af aktiviteterne.

Tekstsiden

På tekstsiden bliver der tale om lærebogselementer, som leverer en systematisk opbygning af teoretisk stof; om aktivitetsbeskrivelser og stimulansmaterialer; tekstsamlinger af orienterende og fortællende art; faglige artikler om specifikke emner og problemstillinger; tekstsamlinger, der rummer typer af cases, fx eksempler på matematiske modeller, udklip fra aviser, magasiner og tidsskrifter, eller på løste matematiske problemer; opgavesamlinger, der række fra rutineøvelser til udfordrende rene eller anvendte matematiske problemer; om matematikhistoriebøger, opslags- og oversigtsværker osv.

it-siden

På it-siden bliver der dels tale om adgang til diverse former for databaser, både over datasamlinger, fx af statistisk art, og over biblioteker af matematiske objekter, såsom geometriske figurer og legemer, specielle funktioner og deres egenskaber, matematiske leksika, adresser på relevante internetsider af forskelligt indhold; dels om processeringssoftware, såsom CAS (Computer Algebra Systems), statistik- og differentialligningspakker, modelleringsværktøjer osv. Også dynamisk visualiseringssoftware, interaktive medier og præsentationsredskaber osv. vil være til rådighed for fremtidens matematikundervisning. Konkrete materialer af typen klodser, brikker, pinde, spil, kort, puslespil, snore, udklipspapir, programmerbare robotter, osv. vil fortsat indgå i det repertoire, matematikundervisningen kan benytte sig af.

Til rådighed for alle?

Hovedspørsmålet i denne sammenhæng er, i hvilket omfang sådanne materialer vil være til rådighed for den enkelte institution, den enkelte lærer, den enkelte klasse og den enkelte elev. I en tid hvor det er vanskeligt at skaffe midler til at forsyne undervisningen med tidssvarende "gammeldags" lærebøger, kan man frygte, at de nye undervisningsmidler kun vil blive et mindretal til del.

2.2.9 i) Hvordan kan man i Danmark udnytte internationale erfaringer med matematikundervisning?

Ser man på matematikundervisningen i andre lande, er to forhold karakteristiske.

Store forskelle mht. traditioner og vilkår

For det første at der er store forskelle i traditionerne, rammerne, vilkårene og omstændighederne for matematikundervisningen, selv i lande fra vor egen nære kulturkreds. Alene de store forskelle i læreruddannelserne og i de organisatoriske rammer for matematikundervisningen inden for fx de nordiske lande springer i øjnene.

Ligheder mht. problemer og perspektiver

For det andet at der, på trods af disse mange forskelle, er store ligheder i problemerne, perspektiverne og diskussionerne angående matematikundervisningen i forskellige lande. Dette er en følge, på den ene side, af fælles træk i samfundsudviklingen i mange lande, og, på den anden side, af at der internationalt foregår en omfattende udveksling af informationer, erfaringer, diskussioner og idéer om matematikundervisningen, som har særligt let ved at finde sted på grund af fagets universelle præg. Det mangeårige internationale og bilaterale samarbejde om matematikdidaktik og matematikundervisning, der er under fortsat udbygning på mange niveauer, og som bl.a. har ført til et væld af projektsamarbejder og internationale konferencer af mange slags, har, sammen med iværksættelsen af store internationale komparative undersøgelser som TIMSS og PISA, medvirket til en globalisering – på godt og ondt – af matematikundervisningens problemer, doktriner og fremgangsmåder (eksempelvis er matematikdelen af OECDs PISA-projekt stærkt præget af kompetencetænkningen, bl.a. fordi KOM-projektets formand er medlem af PISAs matematik-ekspertgruppe).

Noget at lære af hinanden, men konkrete "gode ideer" kan sjældent overføres

Alt dette betyder, på den ene side, at der kan drages store fordele af at gøre sig bekendt med forholdene i andre landes matematikundervisning og med deres problemer, idéer og løsningstiltag. Det gælder både lande i vor egen kulturkreds og USA og fx asiatiske lande som Japan, Korea og Singapore, hvor der er væsentlige og udfordrende erfaringer at forstå og forholde sig til. På den anden side skal man være varsom med at foretage ubekymrede overføringer af lovende ordninger og "gode idéer" til danske forhold, netop fordi der er brug for først at klarlægge, hvornår der er tale om nationalt specifikke betingelser og særtræk, som ikke forefindes i Danmark, og hvornår der er tale om almene anliggender, som med fordel kan søges omplantet til danske forhold. Ikke alene kan man lære af andre landes gode idéer, man kan også lære af deres fejl. Således bliver matematikundervisningen internationalt set et globalt laboratorium, som kan komme dansk matematikundervisning til gode, såfremt laboratoriets resultater granskes med omhu og forsigtighed.

Der er med andre ord gode grunde til for dansk matematikundervisning at holde sig grundigt, men kritisk orienteret om internationale forhold. For eksempel ville det være vigtigt at trænge til bunds i årsagerne til, at det finske undervisningssystem i langt højere grad end det danske er i stand til at udjævne betydningen af forældrenes uddannelsesmæssige, sociale og økonomiske baggrund for elevernes præstationer i PISA2000 (Andersen et al.; 2001; OECD; 2001).

2.2.10 j) Hvordan skal fremtidens matematikundervisning være organiseret?

Centralt spørgsmål i forlængelse af KOM-projektet

Dette er i flere henseender et af de største spørgsmål i forlængelse af KOM-projektet. Spørgsmålet angår jo både den overordnede organisering af matematikundervisningssystemet som helhed, herunder læreruddannelserne, og den "interne" organisering af matematikundervisningen inden for et givet uddannelsesafsnit, og – videre – inden for en given undervisningssammenhæng, fx en klasse eller et hold.

Generelle strukturdiskussioner ikke del af projektet

Vi har, som det fremgår af rapporten, i hovedsagen afstået fra at fremsætte betragtninger og forslag vedrørende matematikundervisningens struktur, fordi strukturspørgsmål ikke er begrænset til matematikundervisningen alene, men oftest berører hele sektorer af uddannelsessystemet. Således har vi fx ikke beskæftiget os med strukturelle eller organisatoriske spørgsmål i forbindelse med universiteternes matematikundervisning. Sådanne spørgsmål kan besvares på et stort antal forskellige, men hver for sig velbegrundede, måder, som det ville være udtryk for futil og skadelig harmoniseringsiver at foreslå erstattet af et enhedssvar. På samme måde er vi ikke gået ind i en diskussion af det betimelige i, at det eksisterende gymnasiums tre (eller fire) matematikundervisningsniveauer, A (1 og 3), B og C, har den arbejdsdeling, opdeling og rolle som tilfældet er. Det er en konsekvens af en overgribende tankegang i struktureringen af de gymnasiale uddannelsers fag, som i givet fald måtte behandles på et tilsvarende overgribende niveau. Her har vi imidlertid tilladt os i en enkelt henseende at gå uden for matematikundervisningens eget territorium, idet vi finder det væsentligt og derfor foreslår – også af hensyn til matematikundervisningen – at en kommende gymnasiereform fører til et "menugymnasium" til afløsning af det eksisterende "buffetgymnasium".

Undtagelse: "menugymnasium" frem for "buffetgymnasium"

Strukureret mangfoldighed som organisationsprincip

Hvad angår organiseringen af matematikundervisningen inden for et givet uddannelsesafsnit eller i en given sammenhæng, er det en følge af de betragtninger, som er fremlagt i dette projekt, at det vigtigste organisationsprincip er *struktureret mangfoldighed*. Der er på den ene side brug for, at matematikundervisningen betjener sig af et stort antal ganske forskellige undervisningsformer og aktiviteter til fremme af elevernes udvikling af matematiske kompetencer, og af overblik og dømmekraft vedrørende matematik som fag. Heraf mangfoldigheden. På den anden side er der brug for, at disse undervisningsformer og aktiviteter kombineres og sættes i rækkefølge på en gennemtænkt og veltilrettelagt måde, både i forhold til den enkelte "lektion" og i forhold til kortere og længere stræk af undervisningen, op til hele blokke, moduler, semestre, år, eller hvad der nu måtte være relevant, alt med det formål at realisere en undervisning, der muliggør opbygningen og udviklingen af matematiske kompetencer, overblik og dømmekraft. Heraf behovet for struktur i mangfoldigheden.

Behov for udnyttelse af gamle og udvikling af nye aktivitetsformer

Hvilke undervisningsformer og aktiviteter, der i denne forbindelse nærmere kan være tale om, er så omfattende et spørgsmål, at vi må opgive at behandle det her. På samme måde som tilfældet er med evalueringsredskaber, er der både brug for en reorientering, tillempning og udnyttelse af de umådeligt mange kendte undervisningsformer og aktiviteter, som allerede er i anvendelse i matematikundervisningen, i større eller mindre omfang, og om at udtænke, afprøve og implementere nye former og aktiviteter.

KOM-projektet begynder for alvor når det er slut

Dette vil blive en af de vigtigste opgaver, hvis KOM-projektet skal realiseres. Alene derved bliver det klart, at KOM-projektet først begynder for alvor, når det er slut.

Del II

Kompetencer som middel til fagbeskrivelser af matematik

3 Hvad er opgaven?

3.1 Indledning

Inspiration fra tidligere arbejder

Arbejdsgruppens arbejde med at anvende matematiske kompetencer som middel til fagbeskrivelser af matematik betjener sig i vid udstrækning af tidligere arbejder af arbejdsgruppens formand Mogens Niss (se fx Niss; 1999, 2000), som også, i kraft af sit medlemskab af OECD/PISA-projektets ekspertgrupper for matematik (se fx OECD; 1999), har øvet indflydelse på dette projekts anvendelse af kompetencer som en central del af arbejdsgrundlaget. Også flere af arbejdsgruppens øvrige medlemmer har på hver deres måde betjent sig af tilsvarende tankegange i deres arbejde. Arbejdsgruppen som sådan har imidlertid gennem sit arbejde foretaget en betydelig videreudbygning og -udvikling af de oprindelige tanker.

3.2 Traditionen

Læseplaners tre ingredienser: Formål, pensum og evaluering

Der er i Danmark tradition for at specificere læseplanerne i matematik på et givet undervisningstrin ved hjælp af tre ingredienser:

a) *Formålet* med undervisningen.

b) *Pensum*, dvs. indholdet af undervisningen forstået som en eller flere lister af emner, begreber, teorier, metoder og resultater (eventuelt suppleret med specifikke faglige mål).

c) *Evaluerings- og eksamensinstrumenter*, der bl.a. tjener til at afgøre, om eleverne har opnået beherskelse af det fastsatte pensum (eventuelt i forhold til de faglige mål nævnt under b).

I nogle sammenhænge fastsættes formål og mål først, mens pensum (og eventuelt evalueringsinstrumenterne) fastsættes bagefter, således at der i pensumbeskrivelsen refereres til mål og formål. Ofte er rækkefølgen dog den omvendte, således at pensum fastlægges først, hvorefter formål og mål tilføjes som en slags forord til pensumbeskrivelsen. Lidt varierende med undervisningstrin og -form kommer også formerne for intern (lærerstyret) evaluering i anden række i forhold til pensumbeskrivelser, mens eksamensinstrumenter og -rammer sædvanligvis er givet relativt uafhængigt af læseplanen selv.

Evaluering, prøver og eksamener spiller en hovedrolle

I praksis betyder disse ting, at når det gælder skrevne læseplaner (bekendtgørelser, vejledninger, studieordninger osv.), er det pensum som er hovedsagen, mens formål, mål og evaluering spiller en sekundær rolle. Når det derimod drejer sig om den daglige virkelighed i undervisningen, spiller evaluering og afsluttende prøver/eksamener en helt afgørende rolle for elevernes aktiviteter og holdninger, men også i høj grad for lærernes.

Problemer ved sådanne læseplaner:

Der kan rejses vigtige indvendinger mod den anførte måde at beskrive læseplaner på. Man kan bl.a. pege på følgende problemer:

Vanskeligt at klargøre hvad mat.uv. går ud på

- Det er med dette udgangspunkt *vanskeligt at klargøre*, i almene termer, hvad matematikundervisning på et givet trin egentlig går ud på, dvs. uden brug af beskrivelser der går i ring ("matematikundervisningen på dette niveau går ud på at lære følgende matematiske emneområder", hvilket ikke rækker afgørende ud over at sige, at matematikundervisningen går ud på at lære matematik). Henvisninger til det overordnede formål med matematikundervisningen hjælper kun til at forklare, hvorfor den (skal) findes, ikke til at gøre rede for hvad den går ud på, i fald det er besluttet, at den skal findes.

Reduktion af faglighed

- En pensumbaseret fagbeskrivelse fører meget let til, at der sættes lighedstegn mellem faglighed og pensumbeherskelse, dvs. viden og færdigheder knyttet specifikt til det pågældende pensum. I betragtning af at alle, der beskæftiger sig professionelt med matematiktilegnelse, er på det rene med, at der er langt mere dybtgående forhold på færde end pensumbeherskelse i den nævnte forstand, udgør identifikationen af faglighed og pensumbeherskelse en *reduktion af forestillingen om faglighed*, som leder til et for lavt ambitionsniveau for undervisningen.

Vanskeligt at sammenligne forskellige slags mat.uv.

- Hvis der udelukkende er pensumbaserede fagbeskrivelser til rådighed for karakterisering af matematikundervisningen i en given sammenhæng, bliver man nødvendigvis henvist til alene at foretage sammenligninger mellem pensa, såfremt man ønsker at *sammenligne matematikundervisningen* på forskellige steder i uddannelsessystemet. Man føres altså ud i at sige, at forskellen mellem matematikundervisningen i X og i Y er, at i X undervises i pensum-X bestående af det og det, mens man i Y undervises i pensum-Y, som består af det og det, og forskellen er, at følgende elementer indgår i pensum-X, men ikke i pensum-Y, og vice versa. Atter har vi at gøre med en sammenligning, der i hovedsagen er overfladisk, og som stort set ikke egner sig til at indfange de langt væsentligere forskelle, der findes i kompleksitet, krav til fordybelse osv. For eksempel vil, med et sådant udgangspunkt, to udgaver af matematikundervisning i ungdomsuddannelserne blive regnet for ækvivalente, hvis de rummer det samme pensum, mens alle professionelle ved, at der kan være en verden til forskel i kravene til indsigt, aktivitet og fordybelse.

Svært at karakterisere niveauforskelle

På samme måde bliver *niveauforskelle* i matematikundervisningen gjort til et pensumanliggende. Således anses pensum-X for at være på et lavere niveau end pensum-Y, hvis alle elementerne i pensum-X enten indgår i pensum-Y eller danner en begrebslogisk forudsætning for pensum-Y. Igen ved enhver der har med sagen at gøre, at et sådant niveaubegreb kan være aldeles misvisende. Selv om fx de naturlige tal kan siges at udgøre en begrebslogisk forudsætning for de rationale tal, er det nemt at beskrive undervisning i de to talområder, hvor den, der angår de naturlige tal, er på et umådeligt højere niveau end den, som vedrører de rationale tal.

3.3 Opgaven

På denne baggrund kan vi stille os følgende opgave: Vi ønsker at finde et overordnet middel til at beskrive læseplaner for faget matematik, som kan bidrage til på adækvat vis, og på et grundlag der er fælles for størstedelen af uddannelsessystemet

Vi søger et overordnet, fælles middel til læseplansbeskrivelse

- at fastlægge og karakterisere, uden at gå i ring, hvad det vil sige at *beherske* (dvs. kende, forstå, udføre og anvende) *matematik*, både i sig selv og i forskellige sammenhænge, uden reference til et bestemt matematisk stof, specielt et bestemt pensum;
- at *beskrive udvikling og progression* i matematikundervisning og -tilegnelse både inden for en given læseplan og imellem forskellige læseplaner;
- at karakterisere forskellige *niveauer af fagbeherskelse* for dermed at kunne beskrive udvikling og progression i den enkelte elevs tilegnelse af matematik;
- at *sammenligne* forskellige matematiklæseplaner og forskellige slags matematikundervisning på parallelle eller forskellige undervisningstrin, på en måde der rækker væsentligt ud over sammenligning af pensa.

I fald denne opgave kan løses, vil vi utvivlsomt få bedre muligheder, end vi har for nærværende, for med folk uden for matematikundervisningsverdenen at diskutere matematikundervisningens begrundelsesproblem, dvs. hvem der på hvilke undervisningstrin bør beherske matematik på hvilket niveau og hvorfor.

Det er vores opfattelse, at begrebet matematiske kompetencer kan være til hjælp med løsningen af den nævnte opgave.

Kompetencer som et sådant middel

4 En kompetencebeskrivelse af matematisk faglighed

"Man burde spørge hvem der ved rigtigst, ikke hvem der ved mest."[1]

4.1 Indledning

Komp. som ekspertise

En person besidder kompetence inden for et område, hvis han eller hun faktisk er i stand til at begå sig med gennemslagskraft, overblik, sikkerhed og dømmekraft inden for det pågældende område. Blandt de flere forskellige betydninger som begrebet kompetence har, vælges i denne sammenhæng betydningen *ekspertise*, og altså ikke den anden udbredte betydning *autorisation*.

Mat. kompetencer i almindelighed

Omsat til matematik betyder dette, at *matematisk kompetence* består i at have viden om, at forstå, udøve, anvende, og kunne tage stilling til matematik og matematikvirksomhed i en mangfoldighed af sammenhænge, hvori matematik indgår eller kan komme til at indgå. Dette implicerer naturligvis en mangfoldighed af konkret viden og konkrete færdigheder inden for diverse matematiske områder, men matematisk kompetence kan ikke, jf. det foregående, reduceres til disse forudsætninger.

Definition af *en* mat. komp.

Hvad er så *en* matematisk kompetence? Det er en selvstændig, rimeligt afgrænset hovedkomponent i matematisk kompetence som netop beskrevet. Man kan også sige, at *en matematisk kompetence er indsigtsfuld parathed til at handle hensigtsmæssigt i situationer, som rummer en bestemt slags matematiske udfordringer*. At sådanne kompetencer er selvstændige og rimeligt velafgrænsede, betyder ikke, at forskellige kompetencer er uden forbindelse med hinanden eller skarpt afgrænsede uden overlap. Man kan tænke på en kompetence som et "knudepunkt" i en "klynge" af ting, der er ophobet nær midten og udtyndes ud imod randen, og som værende til dels sammenvævede med forskellige andre klynger. Dette betyder også, at en kompetence i almindelighed ikke kan erhverves eller besiddes i isolation fra andre kompetencer.

[1] Montaigne: *Om pædagogik*, Essays, 1. bog, kapitel 25.

4.1.1 Om karakteristikken

Otte mat. kompetencer udspænder mat. komp.

Vi er nået frem til, at vi med fordel kan udpege otte centrale matematiske kompetencer. De behandles indgående i de følgende afsnit. Kompetencerne er som anført indbyrdes forbundne, men har ikke desto mindre hver sin identitet. Ingen kompetence kan reduceres til de øvrige kompetencer. Holdes alle de ovennævnte forbehold for øje, kan det være nyttigt at tænke på de otte kompetencer som udgørende et sæt af velafgrænsede dimensioner, som tilsammen udspænder matematisk kompetence. Det ligger i sagens natur, at det er umuligt at levere en videnskabelig dokumentation af, at det både teoretisk og empirisk forholder sig sådan. Snarere er der tale om en pragmatisk påstand om, at disse kompetencer tilsammen udspænder og indfanger det væsentlige i matematisk kompetence. Om denne påstand kan opretholdes i praksis afgøres først og fremmest af, hvordan den står sin prøve i afklarende overvejelser og i konkret brug.

I den nedenstående karakterisering af den enkelte kompetence bruges sommetider ordet “evne”. Det er vigtigt at slå fast, at dette blot er en sproglig substantivering af “det at kunne”, og ingenlunde en psykologisk term der tænkes at referere til faste træk ved en persons mentale udstyr.

Tre slags overblik og dømmekraft

Ud over selve kompetencerne opererer vi med tre slags overblik og dømmekraft vedrørende matematik som fagområde. Som det vil fremgå af omtalen af dem, er de vigtige for opbygningen af en indsigt i matematikkens karakter og rolle i verden, og en sådan indsigt følger ikke automatisk af besiddelse af de otte kompetencer.

4.1.2 To grupper af kompetencer

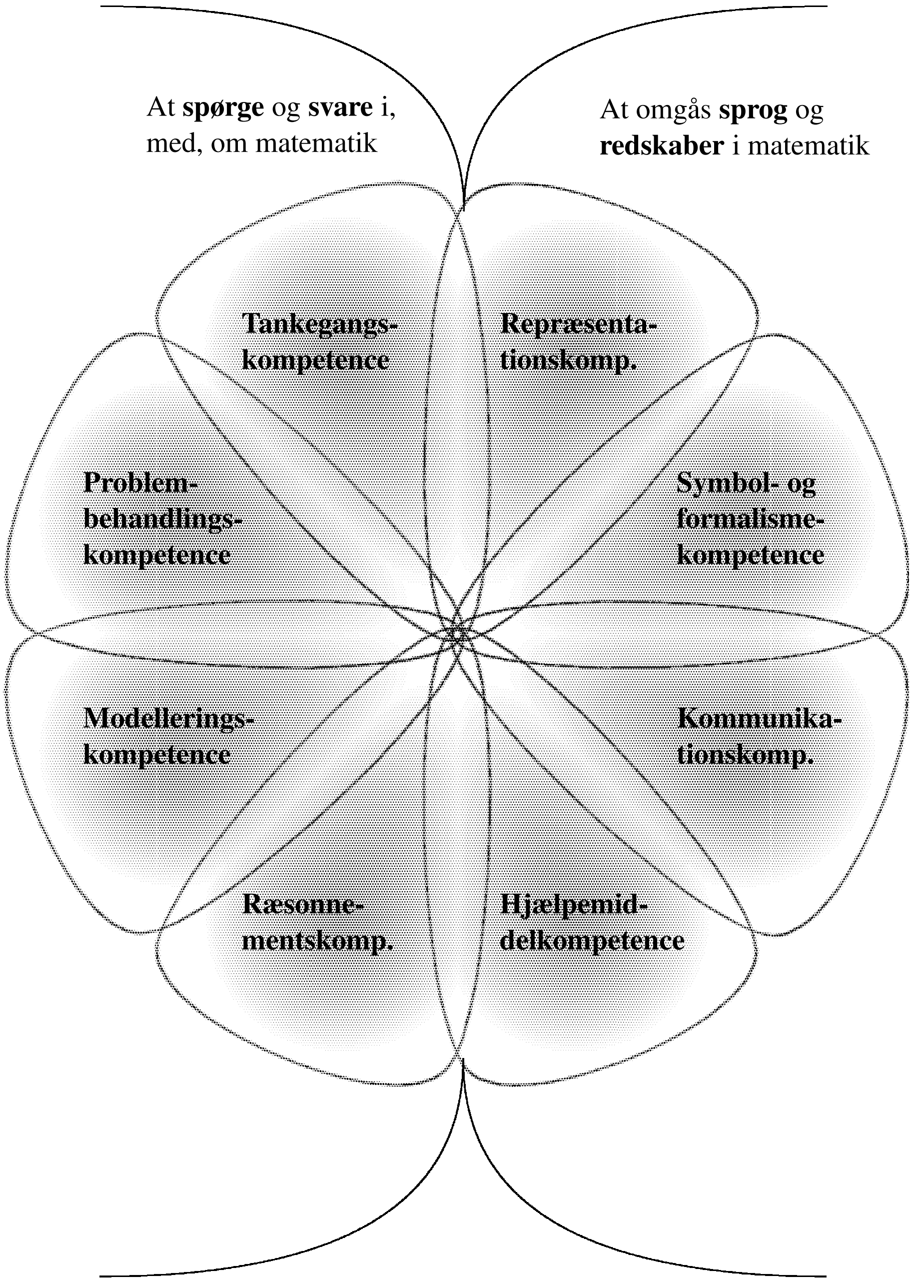
At kunne spørge og svare

At kunne håndtere sprog og redskaber

Som antydet ovenfor, består hver af kompetencerne i at være i stand til, på grundlag af konkret viden og konkrete færdigheder (som i almindelighed ikke er omtalt i selve kompetencekarakteristikkerne), at udøve bestemte typer af matematiske aktiviteter. De otte kompetencer er inddelt i to grupper, som kan kaldes *at kunne spørge og svare i og med matematik*, som rummer de første fire kompetencer, og *at kunne håndtere matematikkens sprog og redskaber*, som udgøres af de fire resterende kompetencer.

En visuel repræsentation som i figur 4.1 kan, hvis den ikke overfortolkes, støtte forståelsen af kompetencerne, såvel som muligheden for at huske dem.

Når vi opererer med to grupper af kompetencer skyldes det hovedsagelig fremstillingsmæssige hensyn. Set fra et passende overordnet synspunkt kan evnen til at gebærde sig i og med matematik siges at bestå i netop disse to kapaciteter eller “overkompetencer”, som så hver for sig ved nøjere konkretisering rummer et sæt specifikke kompetencer.



Figur 4.1 En visuel repræsentation af de otte matematiske kompetencer.

Ingredienserne i at kunne spørge og svare

Nærmere bestemt går det at kunne spørge og svare i og med matematik ud på, forenklet sagt, (a) at kunne stille sådanne spørgsmål og have blik for typen af svar, som kan opnås (tankegangskompetence), (b) at være i stand til selv at svare på sådanne spørgsmål, både i og med matematik (henholdsvis problembehandlingskompetence og modelleringskompetence), samt (c) at kunne forstå, bedømme og frembringe argumenter for svar på matematiske spørgsmål (ræsonnementskompetence).

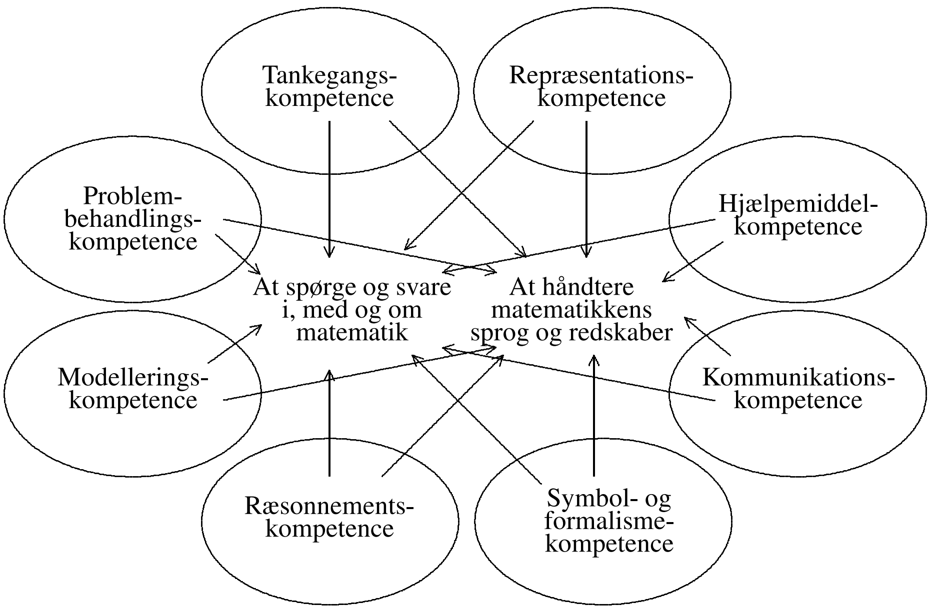
Ingredienserne i at kunne håndtere sprog og redskaber

Tilsvarende går det at kunne håndtere matematikkens sprog og redskaber ud på (a) at være i stand til at omgås forskellige repræsentationer af matematiske sagsforhold (repræsentationskompetence), (b) at kunne håndtere de særlige repræsentationer som udgøres af matematisk symbolsprog og formalisme (symbol- og formalismekompetence), (c) at kunne kommunikere i, med og om matematik (kommunikationskompetence), samt (d) at kunne betjene sig af og forholde sig til diverse tekniske hjælpemidler for matematisk virksomhed (hjælpemiddelkompetence). Det er disse otte kompetencer som karakteriseres nærmere nedenfor.

Opdelingen må ikke overfortolkes

Opdelingen af kompetencerne i to grupper skal imidlertid ikke overfortolkes derhen, at to kompetencer fra hver sin gruppe er mindre forbundne end to kompetencer fra den samme gruppe. Anlægges andre synsvinkler end den valgte opdeling, kan der være lige så tæt forbindelse mellem to kompetencer fra hver sin gruppe. For eksempel er besiddelsen af symbol- og formalismekompetence oftest en afgørende forudsætning for at kunne svare på spørgsmål, dvs. for at besidde problembehandlingskompetence.

Det indtryk, som figur 4.1 måske kunne give af kompetencerne som tilhørende to adskilte sider af matematisk faglighed, er således et eksempel på overfortolkning af denne figur. Alle de otte kompetencer "bidrager" således direkte eller indirekte til besiddelsen af de to "overkompetencer", hvilket vi har forsøgt at visualisere i figur 4.2.



Figur 4.2 En visuel fremstilling af at de matematiske kompetencer alle "bidrager" til begge "overkompetencer".

Til beskrivelse af den enkelte kompetence er der nedenfor anført en række aspekter og komponenter, som indgår i den. Det er ikke tanken, at disse aspekter og komponenter skal opfattes som en række delkompetencer, som kan selvstændiggøres. De tjener alene det formål at uddybe, hvad kompetencen går ud på. Det samme gælder i endnu højere grad de anførte eksempler, som har til opgave at illustrere punkterne. I den forbindelse er der flest eksempler anført ved kompetencer, som måske ikke er helt selvforklarende.

Aspekter af komp. er ikke delkomp.

4.2 At kunne spørge og svare i og med matematik

4.2.1 Tankegangskompetence – at kunne udøve matematisk tankegang

Karakteristik

Denne kompetence består for det første i at *være klar over*, hvilke slags spørgsmål som er karakteristiske for matematik, i selv at kunne *stille sådanne spørgsmål*, og i at *have blik for hvilke typer af svar* som kan forventes. Af særlig vigtighed er her matematikkens efterstræbelse af nødvendige og tilstrækkelige betingelser for et objekts besiddelse af en given egenskab.

Arten af spørgsmål og svar

Den består tillige i at *kende*, *forstå* og *håndtere* givne matematiske *begrebers rækkevidde* (og begrænsning) og deres forankring i diverse domæner, i at kunne udvide et begreb ved *abstraktion* af egenskaber i begrebet, i at kunne *forstå* hvad der ligger i *generalisering* af matematiske resultater, og selv at kunne generalisere sådanne til at omfatte en større klasse af objekter.

Begrebers rækkevidde

Denne kompetence omfatter også det at kunne *skelne*, både passivt og aktivt, mellem *forskellige slags matematiske udsagn* og påstande, herunder "betingede udsagn", "definitioner", "sætninger", "fænomenologiske påstande" om enkelttilfælde, og "formodninger" baseret på intuition eller erfaringer med specialtilfælde. Af særlig betydning er her forståelsen af den rolle eksplicitte eller implicitte "kvantorer" spiller i matematiske udsagn, ikke mindst når de kombineres.

Forskellige slags mat. udsagn

Kommentar

Kernen i det, som berøres af denne kompetence, er selve arten af matematiske spørgsmål og svar. Det er derimod ikke det faktiske sagsforhold i spørgsmålene eller svarene, fremgangsmåder til at erhverve svarene, eller korrektheden af mulige svar, der er på dagsordenen her. Fremgangsmåderne til erhvervelse af svar er en hovedsag i den nedennævnte problembehandlingskompetence, mens korrektheden af svar står centralt i den såkaldte ræsonnementskompetence.

Ikke substansen af spørgsmål og svar, men deres karakter, som står i centrum

Der kan måske være grund til at understrege, at der i denne sammenhæng først og fremmest tænkes på spørgsmål og anliggender af egentlig matematisk art, også selv om de måtte være udsprunget af forhold uden for matematikken selv, fra omverdenen eller fra andre fagområder. Evnen til at udsætte sådanne udenomsmatematiske forhold for matematisk behandling er en selvstændig kompetence, som behandles nedenfor under modelleringskompetence.

Eksemplificering

Karakteristiske spørgsmål

Karakteristiske spørgsmål i matematik har ofte en prototypisk skikkelse à la, "Findes der…?", "Hvor mange…?", "Kan det tænkes at…?", "Er påstanden nødvendig eller tilstrækkelig, eller begge dele?", "Kan man slække på de gjorte forudsætninger uden at ændre konklusionen?"

Karakteristiske svar

Svarene kan typisk have formen "Ja, fordi…", "Nej, fordi…", "Påstanden er nødvendig, men ikke tilstrækkelig, som følgende eksempel viser…", "Det afhænger af situationen, idet…", "Det er et åbent spørgsmål…", "Hvis…så…", "Der gælder…hvis og kun hvis…".

Konkrete illustrationer af *karakteristiske spørgsmål og svar*, hentet fra forskellige undervisningstrin, kunne *fx* være:

A: "På hvor mange forskellige måder kan man udtrykke tallet 3 som differens mellem to naturlige tal?"

B: "Uendeligt mange".

A: "Hvis man spillede skak på et bræt med $11 \cdot 11$ felter, ville der så også være lige mange sorte og hvide felter, ligesom på et normalt skakbræt?"

B: "Nej, for det samlede antal felter er ulige".

A: "Er det sandt, at man blandt rektanglerne med et bestemt areal kan opnå vilkårligt store omkredse?"

B: "Ja".

A: "Er det også sandt, at man blandt rektanglerne med en bestemt omkreds kan opnå vilkårligt store arealer?"

B: "Nej. Det største areal fås ved et kvadrat med den givne omkreds".

A: "Hvor mange forskellige rækker kan man egentlig udfylde på en tipskupon?"

B: "3^{13}".

A: "Er værdimængden for et tredjegradspolynomium altid hele mængden af reelle tal?"

B: “Ja”.

A: “Gælder det samme for alle polynomier?”

B: “Nej, ikke for dem af lige grad”.

A: “Findes der overhovedet nogen polynomier som har asymptoter?”

B: “Ja, men kun førstegradspolynomier (hvis grafer jo selv er asymptoter); bortset fra dem har ingen andre polynomier asymptoter”.

A: “Er $0,99999\dots$ ikke det sidste tal før 1?”

B: “Nej, $0,99999\dots$ er lig med 1”.

A: “Hvilke firkanter har omskrevne cirkler?”

B: “Det er ikke så let at svare på uden videre. Et definitivt svar kræver en lidt længere udredning”.

A: “Kan man løse den trigonometriske ligning $\sin x = a$?”

B: “Det afhænger dels af hvad a er, dels af hvad man mener med ‘at løse’. Hvis a ligger i det afsluttede interval fra -1 til 1, kan man angive tilnærmede løsninger med en vilkårlig nøjagtighed, men for de fleste værdier af a kan man ikke angive en eksakt løsning alene ved hjælp af brøk- eller rodudtryk.”

4.2.2 Problembehandlingskompetence – at kunne formulere og løse matematiske problemer

Karakteristik

Denne kompetence består dels i at kunne *opstille*, dvs. detektere, formulere, afgrænse og præcisere forskellige slags matematiske problemer, “rene” såvel som “anvendte”, “åbne” såvel som “lukkede”, dels i at kunne *løse* sådanne matematiske problemer i færdigformuleret form, egnes såvel som andres, og, om fornødent eller ønskeligt, på forskellige måder.

Opstille og løse problemer

Kommentar

Et (formuleret) matematisk problem er et særlig type matematisk spørgsmål, nemlig ét hvor en matematisk undersøgelse er nødvendig for besvarelsen. Sådan set kunne også spørgsmål, som kan besvares alene ved hjælp af (få) specifikke rutineoperationer, falde ind under begrebet “problem”. Sådanne spørgsmål, som for den der skal løse dem, kan besvares ved aktivering af rutinefærdigheder, henregner vi imidlertid ikke under matematiske problemer i denne forbindelse. Derved bliver

Begrebet “problem” er relativt

begrebet “matematisk problem” ikke absolut, men relativt til den person som stilles over for det. Det, som for én person kan være en rutineopgave, kan for en anden være et problem, og omvendt.

Ikke ethvert spørgsmål opstiller et problem

Afgrænsning til andre komp.

Ikke ethvert matematisk spørgsmål opstiller et matematisk problem. For eksempel er “Hvad betyder det, når der står 0 i 406?” ikke et problem som kræver en matematisk undersøgelse, men er et spørgsmål til matematisk begrebsforståelse og sprogbrug. Men da mange spørgsmål faktisk opstiller et problem, er det at kunne formulere matematiske problemer intimt forbundet med det at kunne stille matematiske spørgsmål og have blik for typer af svar på dem, jf. tankegangskompetencen. Men de to kompetencer er altså ikke sammenfaldende. Det at kunne løse et matematisk problem indgår ikke i tankegangkompetencen. Omvendt indgår fx tankegangskompetencens skelnen mellem definitioner og sætninger ikke i sig selv i problembehandlingskompetencen, om end denne skelnen i praksis kan være en vigtig forudsætning for denne kompetence.

Grænsen mellem behandlingen af anvendte matematiske problemer og aktiv matematisk modelbygning er flydende. Jo mere det er nødvendigt at tage specifikke træk ved de elementer der indgår i problemstillingen i betragtning, jo mere er der tale om modelbygning.

Det at kunne detektere og formulere matematiske problemer og det at kunne løse færdigformulerede matematiske problemer er ikke det samme. Det er meget vel muligt at kunne formulere matematiske problemer uden at være i stand til at løse dem. Man kan endda opstille problemer alene med et elementært begrebsapparat, uden at en løsning overhovedet kan skabes med dette begrebsapparat. Tilsvarende er det muligt at være en dygtig problemløser uden at være god til at finde og formulere matematiske problemer.

Eksemplificering

Kun “små” eksempler

I betragtning af hvor centralt problemopstilling, problemformulering og problemløsning er i matematisk virksomhed på ethvert trin, kan der gives endeløst mange eksempler på problemer og deres løsning. Eftersom problemløsning ofte er en kompliceret og langstrakt affære, er der grænser for, hvor detaljerede eksempler vi kan give her. Nogle få eksempler må række.

A: “Kan man få en trekant ud af tre vilkårlige sidelængder?”

B: “Nej. Har vi fx sidelængderne 3, 5, og 10 og starter med at placere de to korte sider ved hver deres endepunkt af den lange side, vil de to korte sider ikke kunne nå hinanden. Der dannes derfor ingen trekant.”

A: “Er der lige mange sorte og hvide felter på et sædvanligt skakbræt?”

B: “Ja, for i hver række er der fire sorte og fire hvide”.

A: "Hvis man kun havde mønter med værdierne 3 og 5, hvilke beløb kunne man så betale med disse mønter?"

B: "Åbenbart kan der kun blive tale om heltallige beløb. Blandt dem kan man oplagt ikke betale beløbene 1, 2, 4 og 7. Men alle større heltalsbeløb kan rammes. Lad os først konstatere, at 6 kan nås med to 3-mønter, 8 med én af hver af mønterne, 9 med tre 3-mønter, og 10 med to 5-mønter. Kan vi indse, at alle beløb mellem 10 og 14 kan nås, er vi færdige, for så kan vi nå ethvert større beløb på følgende måde:

Ethvert naturligt tal, n, har en entydigt bestemt rest blandt tallene 0, 1, 2, 3, 4 ved division med 5. Det betyder, at der hvis n er mindst 15, findes præcis ét helt tal $p > 2$ og én rest r blandt 0, 1, 2, 3, 4, så at $n = 5p + r$. Foretager vi nu omskrivningen $n = 5(p-2) + 10 + r$, vil $p - 2$ være et positivt helt tal, mens $10 + r$ er et helt tal fra og med 10 til og med 14. Eftersom beløbet $5(p-2)$ kan betales med 5-stykker ($p - 2$ stks), og beløbet $10 + r$ falder inden for det fremhævede område og dermed pr. forudsætning også kan betales med 3- og 5-mønterne, kan også alle beløb fra og med 15 betales med disse mønter.

At beløbene 11, 12, 13 og 14 kan nås, ses ved simpel inspektion ($11 = 2 \cdot 3 + 5$, $12 = 4 \cdot 3$, $13 = 3 + 2 \cdot 5$, $14 = 3 \cdot 3 + 5$). Hermed er problemet løst."

A: "Hvis man skal udskære og rulle et stykke karton, så det fremstiller en skråt afskåret cirkulær cylinder, som i Planetariet i København, hvilken randkurve skal man så vælge i kartonets ene ende?"

B: "Lad os antage at den færdige cylinder har radius r, og at det laveste punkt på det plane, skrå "tag" skal have afstanden m fra grundplanen, og det højeste afstanden M. Lad os derefter indlægge et tredimensionalt koordinatsystem i cylinderen, sådan at både tagets lavpunkt og dets højdepunkt ligger i xz-planen og har koordinaterne hhv. $(r,0,m)$ og $(-r,0,M)$, og sådan at cylinderens akse er z-aksen.

Så vil aksens skæringspunkt med taget have koordinaterne $(0,0,(m+M)/2)$, mens $(M-m,0,2r)$ vil være en normalvektor til tagplanen. Repræsenterer vi det typiske punkt på skæringskurven mellem cylinderen og taget ved koordinaterne $(r\cos t, r\sin t, h(t))\,, t \in [0,2\pi[$, er det essentielt højdefunktionen h, som skal bestemmes. Det sker ved at forlange, at vektoren fra cylinderaksens skæringspunkt med taget til punktet på randkurven er vinkelret på den valgte normalvektor til tagplanen, dvs.

$$\left(r\cos t, r\sin t, h(t) - \frac{m+M}{2}\right) \cdot (M-m,0,2r) = 0,$$

altså

$$(M-m)r\cos t + 2rh(t) - r(m+M) = 0.$$

Heraf kan vi bestemme h:

$$h(t) = \frac{m+M}{2} - \frac{M-m}{2}\cos t \ , \ \ t \in [0, 2\pi[\, .$$

Foretrækker vi at parametrisere højden som funktion af buelængden s (svarende til den underste side på kartonstykket), fremfor som funktion af drejningsvinklen t, har vi ($s = rt$) sluttelig

$$H(s) = h(s/r) = \frac{m+M}{2} - \frac{M-m}{2}\cos(s/r) \ , \ \ s \in [0, 2\pi r[\, .$$

Hermed er opgaven løst."

4.2.3 Modelleringskompetence – at kunne analysere og bygge matematiske modeller vedrørende andre felter

Karakteristik

Modelanalyse

Denne kompetence består på den ene side i at kunne *analysere* grundlaget for og egenskaberne ved foreliggende modeller og at kunne bedømme deres rækkevidde og holdbarhed. Hertil hører at kunne "*afmatematisere*" (træk ved) foreliggende matematiske modeller, dvs. at kunne afkode og fortolke modelelementer og -resultater i forhold til det felt eller den situation som er modelleret. På den anden side består kompetencen i at kunne *udføre aktiv modelbygning* i en given sammenhæng, dvs. at bringe matematik i spil og anvendelse til behandling af anliggender uden for matematikken selv.

Modelbygning

Elementer i modelbygning

Aktiv modelbygning indeholder en række forskellige elementer. Først at kunne *strukturere* det felt eller den situation der skal modelleres. Dernæst at kunne gennemføre en *matematisering* heraf, dvs. en oversættelse af objekter, relationer, problemstillinger m.v. til et område af matematikken, resulterende i en matematisk model. At kunne *behandle* den opståede model, herunder løse de matematiske problemer den måtte give anledning til, samt at kunne *validere* den færdige model, dvs. bedømme dens holdbarhed både internt (i forhold til modellens matematiske egenskaber) og eksternt (dvs. i forhold til det felt og den situation modellen omhandler). Der indgår tillige at kunne *analysere modellen kritisk*, både i forhold til dens egen brugbarhed og relevans og i forhold til mulige alternative modeller, og at kunne *kommunikere* med andre om modellen og dens resultater. Endelig indgår det i aktiv modelbygning at have *overblik* over og kunne *styre* den samlede modelleringsproces.

Kommentar

Selv om der principielt set er tale om matematisk modeldannelse, hver gang matematikken bringes i anvendelse uden for dens eget område, vil vi her kun bruge ordene model og modelbygning i tilfælde, hvor der optræder en ikke-selvfølgelig tilskæring af den modellerede situation, som indebærer beslutninger, antagelser, indsamling af oplysninger og data m.v.

Inddragelse af den modellerede situation

Behandling af matematikholdige problemstillinger, som ikke for alvor kræver bearbejdning af de virkelighedselementer, der optræder, henhører under den ovenfor omtalte problembehandlingskompetence. De træk af modelleringskompetencen, som koncentrerer sig om selve modelbehandlingen, er tæt forbundet med den ovennævnte problembehandlingskompetence. Men derudover indgår der i modelleringskompetencen mange elementer, som ikke primært er af matematisk art, fx viden om udenomsmatematiske kendsgerninger og betragtninger, samt beslutninger vedrørende modelleringens formål, hensigtsmæssighed, relevans for stillede spørgsmål osv.

Afgrænsning til problembehandlingskomp.

Eksemplificering

Når det gælder *analysen af foreliggende (eller foreslåede) modeller*, kan man fx

Modelanalyse

- betragte en model, der opererer med eksponentiel vækst af verdens befolkning i perioden $1900 - 2000$ og sammenholde den med tilgængelige befolkningsdata.
- undersøge den preskriptive body-mass-index model (BMI = vægt [kg]/(højde)^2 [m^2]) for undervægt, normalvægt, overvægt og fedme af mennesker.

Hvad angår *aktiv modelbygning*, kan man fx opstille en model til behandling af udfordringer som de nedenstående. I alle tilfælde er det nødvendigt at foretage afgrænsninger, gøre antagelser, eller indhente data for at behandlingen kan foretages.

Modelbygning

- En undersøgelse af hvordan grundplanen for et hus kan se ud, hvis dets areal skal være 120 m^2.
- En undersøgelse af hvor dyrt det er at tale i mobiltelefon.
- "Hvad er den effektive beskatning af en krone tjent af en lønmodtager, hvis der også tages hensyn til moms, afgifter m.m.?"
- En bestemmelse af den optimale form på en konservesdåse.
- En vurdering af hvor stor en del af energiforbruget i Danmark der kan dækkes af vindmøller, og hvor mange møller det ville give anledning til.
- "Hvordan udvikler antallet af AIDS-tilfælde i Danmark sig?"
- "Er det muligt, at gennemsnitsalderen i en befolkning er 35 år samtidig med at mindst 40% af befolkningen er 60 eller derover?"

4.2.4 Ræsonnementskompetence – at kunne ræsonnere matematisk

Karakteristik

Følge og bedømme ræsonnementer

Denne kompetence består på den ene side i at kunne *følge* og *bedømme* et *matematisk ræsonnement*, dvs. en kæde af argumenter fremsat af andre på skrift eller i tale til støtte for en påstand, specielt at vide og *forstå* hvad et matematisk *bevis* er, og hvordan det adskiller sig fra andre former for matematiske ræsonnementer, fx heuristiske ræsonnementer hvilende på intuition eller på betragtning af specialtilfælde, og at kunne afgøre hvornår et matematisk ræsonnement faktisk udgør et bevis, og hvornår ikke. Heri indgår at forstå den logiske betydning af et *modeksempel*. Det indgår tillige i kompetencen at kunne *afdække de bærende idéer i et matematisk bevis*, herunder skelne mellem hovedpunkter og detaljer, mellem idéer og teknikaliteter.

Forstå hvad et bevis er

Udtænke og gennemføre

På den anden side består kompetencen i at kunne *udtænke og gennemføre* informelle og *formelle ræsonnementer* (på basis af intuition), herunder omforme heuristiske ræsonnementer til egentlige (gyldige) beviser.

Kommentar

Ikke kun retfærdiggørelse af sætninger, også af svar på spørgsmål og problemer

Af mange betragtes matematisk bevisførelse, men også matematisk ræsonneren i almindelighed, som en sag, der først og fremmest angår retfærdiggørelsen af matematiske sætninger, endda ofte i form af ren og skær gengivelse af færdige beviser. Ræsonnementskompetencen omfatter også dette, men går videre, idet den kommer i spil overalt, når det gælder om at bedømme holdbarheden af matematiske påstande, inklusive at overbevise sig selv eller andre om den eventuelle gyldighed af sådanne. Det kan dreje sig både om reglers og sætningers rigtighed, men også om godtgørelsen af, at givne svar på spørgsmål, opgaver, eller problemer er korrekte og fyldestgørende. Ved således også at omhandle retfærdiggørelsen af svar og løsninger, er ræsonnementskompetencen intimt forbundet med både problembehandlings- og modelleringskompetencerne. Den udgør så at sige disses "juridiske" side.

Afgrænsning til andre komp.

I princippet kunne også evnen til at gennemføre rene rutineoperationer, fx udregninger, siges at falde ind under ræsonnementskompetencen, eftersom der jo er tale om at retfærdiggøre et regneresultat. Hvad der for en person er en rutineoperation, kan for en anden være et uoverstigeligt problem. Selve udførelsen af sådanne operationer henregnes imidlertid under den nedenfor omtalte symbol- og formalismekompetence, mens det at aktivere operationerne kan høre ind under ræsonnementskompetencen, hvis denne aktivering stiller krav til opfindsomhed, analyseevne eller overblik.

Eksemplificering

Som eksempler på det *at følge og bedømme et matematisk ræsonnement* kan nævnes:

Følge og bedømme ræsonnementer

A: "Når man kvadrerer et tal, bliver resultatet altid større. Det gælder jo for alle de uendeligt mange hele tal, og så må det også gælde for alle andre tal."

B: "Nej, påstanden er for det første forkert, idet fx $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. For det andet kan man ikke overføre alle egenskaberne ved mængden af hele tal til egenskaber ved en mere omfattende talmængde, fx de rationale tal."

A: "Ethvert ulige tal er sammensat. Thi hvis n er ulige, er $n = ((n+1)/2)^2 - ((n-1)/2)^2$, hvor både $(n+1)/2 = k$ og $(n-1)/2 = m$ er hele tal (da n er ulige). Men eftersom $k^2 - m^2 = (k-m)(k+m)$ er n sammensat."

B: "Ræsonnementet er forkert, fordi $k - m = 1$, så der påstås blot at $n = 1 \cdot n$, hvilket ikke gør n til et sammensat tal.".

- Beviset for irrationalitet af $\sqrt{2}$.

Til illustration af hvad det kan betyde *at vide og forstå, hvad et bevis (ikke) er*, kan vi anføre følgende bevisforslag:

Forstå hvad et bevis (ikke) er

A: "Hvis f har grænseværdien b for x gående mod a, og g har grænseværdien c for y gående mod b, må den sammensatte funktion $g \circ f$ have grænseværdien c, når x går mod a. For når x går mod a, vil jo pr. forudsætning $f(x)$ gå mod b, hvilket videre pr. forudsætning om g fører til, at $g(f(x))$ går mod c, hvilket netop var påstanden."

B: "Dette er ikke et holdbart bevis, for håndteringen af grænseværdibegrebet er for løs og uskarp. Faktisk er den påstand, der 'bevises', forkert, med mindre g opfylder yderligere forudsætninger. Problemet er, at værdimængden for f kan være indeholdt i en del af definitionsmængden for g på en sådan måde, at den sammensatte funktion ikke kan nærme sig c. Som fx med f og g defineret ved $f(x) = 0$ for alle x , og $g(0) = 1$, men $g(y) = 0$ ellers. Så vil med $a = 0$, $f(x)$ gå mod $b = 0$ for x gående mod a. Desuden vil $g(y)$ gå mod $c = 0$ for y gående mod $b(= 0)$. Men $g(f(x)) = 1$ for alle x. Det gælder derfor ikke, at $g \circ f$ har grænseværdien $c(= 0)$ for x gående mod a."

Afdækning af *de bærende idéer i et (korrekt) bevis* kan illustreres således:

Afdække de bærende ideer i et bevis

- "Gauss' bevis for at $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$ hviler på den idé, at man kan bestemme summen ved hjælp af en ligning. Ved at lægge tallet $n + \ldots + 2 + 1$ til venstresiden fås dels den søgte sum to gange, dels n parenteser hver bestående af to tal, hvis sum er $n+1$. At udnytte dette til at udtrykke summen er derefter teknik (multiplikation af n med $n+1$ efterfulgt af løsning af en enkel ligning).

Dette bevis har en fordel fremfor et sædvanligt induktionsbevis, som har den svaghed, at det forudsætter et bud på summen, hvilket ikke er påkrævet i Gauss' bevis, som faktisk bestemmer summen."

Selvstændig bevisførelse

Endelig kan *selvstændig bevisførelse*, fra heuristik til formelt bevis, illustreres med følgende eksempel:

- "7 må være den hyppigst forekommende sum af øjnene i et kast med to terninger, fordi 7 er det tal blandt de mulige summer som kan opnås på flest måder. Det kan vi nærmere præcisere fx således: Hvis de to terningers udfald antages indbyrdes uafhængige, består det samlede sæt af lige sandsynlige udfald af 36 kombinationer af øjne, idet hver terning kan udvise 6 forskellige resultater. Dette kan illustreres af et kvadratisk skema. Af disse 36 kombinationer opstår summen 7 på netop 6 måder, nemlig ved $1+6$, $2+5$, $3+4$, $4+3$, $5+2$, $6+1$ (det første tal i hver sum er antallet af øjne på den første terning; tilsvarende med det andet). Det svarer netop til antallet af måder, hvorpå 7 kan spaltes som sum af to naturlige tal. Ingen af de øvrige mulige summer kan fås på så mange som 6 måder. For summer under 7, fordi antallet af spaltninger åbenbart er mindre end antallet af spaltninger af 7. For summer fra og med 8 til og med 12, fordi kun nogle af spaltningerne svarer til terningkast, nemlig $2+6$, $3+5$, $4+4$, $5+3$, $6+2$ for 8's vedkommende og så fremdeles, til og med 12, som kun kan realiseres som $6+6$."

Man kunne også nævne en reparation af forudsætningerne og argumenterne i ovenstående "bevis" vedrørende sammensatte funktioner. Hvis fx g forudsættes at være kontinuert i b, er påstanden korrekt, og bevisskitsen kan udbygges og præciseres til et korrekt bevis.

4.3 At kunne håndtere matematikkens sprog og redskaber

4.3.1 Repræsentationskompetence – at kunne håndtere forskellige repræsentationer af matematiske sagsforhold

Karakteristik

Forstå og betjene sig af forskellige repræsentationer

Denne kompetence består dels i at kunne *forstå* (dvs. afkode, fortolke og skelne mellem) og *betjene sig af* forskellige slags repræsentationer af matematiske objekter, fænomener, problemer eller situationer (herunder symbolske, specielt algebraiske, visuelle, geometriske, grafiske, diagrammatiske, tabelmæssige eller verbale repræsentationer, men også konkrete repræsentationer ved materielle objekter), dels i at kunne forstå de indbyrdes *forbindelser* mellem forskellige repræsentationsformer for det samme sagsforhold og have kendskab til deres styrker og svagheder, herunder informationstab og -tilvækst, dels i at kunne *vælge* blandt og *oversætte* imellem forskellige repræsentationsformer for et givet sagsforhold, alt efter situation og formål.

Vælge og oversætte mellem repræsentationer

Kommentar

Af særlig betydning i matematik er symbolske repræsentationer. Derfor er der en nær forbindelse mellem den foreliggende kompetence og den efterfølgende symbol- og formalismekompetence, som bl.a. fokuserer på "spillereglerne" for omgangen med matematiske symboler, men også omhandler sider af matematisk formalisme som ikke er knyttet til symbolske repræsentationer. Eftersom det at repræsentere matematiske sagsforhold er nært forbundet med kommunikation i, med og om matematik, er der også klare forbindelser til den senere omtalte kommunikationskompetence.

Afgrænsning til andre komp.

Repræsentationer ved hjælp af materielle objekter skaber forbindelse til den sidste af de otte kompetencer, hjælpemiddelkompetencen.

Eksemplificering

Et elementært eksempel på denne kompetence kunne være evnen til at repræsentere et naturligt tal med prikker eller klodser af ens form og størrelse, eller opskrivning af tal i positionssystemet ved hjælp af cuisenairestænger, centicubes, kuglerammer eller lignende og ved hjælp af symboler i hindu-arabisk notation, romertal, kileskrift m.v., samt ved verbal repræsentation (eks. fem-millioner-ethundredeogseksogtyvetusinde-nihundredeogsyvogtredive).

Også elementære repræsentationer er repræsentationer

Et andet elementært eksempel er tidsangivelser, hvor viserure og digitalure leverer ækvivalente, men helt forskellige repræsentationer af det samme klokkeslet.

Det kunne også være at forstå og håndtere forskellige repræsentationer af objektet π og forbindelserne imellem dem. Repræsentationen kan fx være

- symbolet π.
- en uendelig decimalbrøk $3,14159265\ldots$.
- en rational tilnærmelse (med deraf følgende unøjagtighed) med fx brøkerne $22/7$ eller $223/71$.
- geometrisk som omkredsen af en cirkel med diameter 1.
- grænseværdien for den uendelige række $4-4/3+4/5-4/7+4/9-4/11+\ldots$.

Et andet eksempel er begrebet lineær funktion (i skolematematikkens forstand), som kan repræsenteres

- som regneforskrift, fx $f(x) = 3x - 7$.
- algebraisk som løsningsmængde til en ligning, fx $2y - 6x + 14 = 0$.
- som en parameterfremstillet punktmængde i et koordinatsystem, fx $\{(x,y)|x = t, y = 3t - 7, t \in \mathbf{R}\}$.
- ved en tegnet graf i et koordinatsystem.
- ved et geometrisk objekt, fx den rette linie i planen som går gennem punkterne $(2,-1)$ og $(0,-7)$.
- ved en tabel af sammenhørende værdier af x og y (med indbygget informationstab, hvis det ikke i forvejen vides at tabellen fremstiller en lineær funktion, og med indbygget informationsoverskud, hvis det vides, at funktionen er lineær, og tabellen indeholder mere end to forskellige sammenhørende sæt).

Endnu et eksempel er en ellipse, der kan repræsenteres

- geometrisk som et snit i en kegle eller en cylinder.
- som skyggen af en kugle.
- som det geometriske sted for alle de punkter, hvis afstande til to givne punkter har en konstant sum.
- som mængden af punktpar i et koordinatsystem, som opfylder ligningen $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ $(a, b \neq 0)$.

For alle eksemplerne går repræsentationskompetencen bl.a. ud på at forstå repræsentationerne, have klarhed over forbindelserne mellem dem, herunder informationstab og -gevinst ved overgang fra den ene til den anden, over styrker og svagheder ved de enkelte repræsentationer, og på at være i stand til at vælge (mellem) en eller flere af dem.

4.3.2 Symbol- og formalismekompetence – at kunne håndtere matematisk symbolsprog og formalisme

Karakteristik

Afkode, oversætte og behandle symbolholdige udsagn

Formelle mat. systemer

Denne kompetence består dels i at kunne *afkode* symbol- og formelsprog, i at kunne *oversætte* frem og tilbage mellem symbolholdigt matematisk sprog og naturligt sprog, og i at kunne *behandle og betjene sig af* symbolholdige udsagn og udtryk, herunder formler. Dels i at *have indsigt i* karakteren af og "spillereglerne" for formelle matematiske systemer (typisk aksiomatiske teorier).

Kommentar

Denne kompetence adskiller sig navnlig fra den ovennævnte repræsentationskompetence, som den ellers er nært forbundet med, ved at fokusere på symbolernes karakter, status og betydning og på selve håndteringen af dem, inklusive reglerne herfor. Dertil kommer, at den også omhandler omgang med formelle matematiske systemer, hvad enten disse har en symbolsk form eller ej.

Afgrænsning til repræsentationskomp.

Matematiske symboler omhandler ikke kun avancerede matematiske specialsymboler, men også talsymboler og basale tegn i forbindelse med regneoperationer. Tilsvarende omhandler symbolbehandling ikke kun "bogstavregning", "calculus" og lignende, men også de formelle sider af elementær regning.

Eksemplificering

På det elementære plan illustreres denne kompetence fx af omgangen med tal og talbehandling. Det kan dreje sig om

Også elementære symboler og formler

- at forstå, at 406 står for fire hundreder, ingen tiere og 6 enere.
- at man ikke har lov til at skrive $6 + \cdot 5$ eller $6 - -3$ (mens $6 + +3$ ikke er meningsløst, men dårlig syntaks).
- at $5 \cdot (3+4)$ ikke er det samme som $5 \cdot 3 + 4$.
- at $4 < 7$ er et udsagn, som skal læses "4 er mindre end 7".

På senere trin kan det dreje sig om at forstå

- at $\{(x,y)|x = t, y = 3t - 7, t \in \mathbf{R}\}$ angiver mængden af alle reelle talpar, hvor førstekoordinaten antager en vilkårlig reel værdi, mens andenkoordinaten er bundet til at være netop tre gange denne værdi, minus 7.
- indholdet i, hvad der er blevet kaldt "verdens smukkeste formel": $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Det at kunne afkode symbol- og formelsprog kan eksemplificeres ved at kunne sige, at den ovenstående mængde netop beskriver den rette linje i et retvinklet koordinatsystem, som afskærer -7 på y-aksen og har 3 som hældningskoefficient.

Omvendt er fx det at kunne opskrive samlingen af alle naturlige tal, der ved division med 5 giver resten 4, i symbolsprog som $\{p \in \mathbf{N}|\exists k \in \mathbf{N} : p = 5k + 4\}$ et eksempel på oversættelse fra naturligt sprog til symbolsprog. Det samme gælder $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, som en oversættelse til symboler af den tidligere så "populære" regel "to tals sum gange de samme to tals differens er lig differencen mellem tallenes kvadrater".

Hvad angår eksempler på *håndtering af symbolsprog og formler* er der utallige. Der kan fx være tale om at kunne

Håndtering af symbolsprog og formler

- foretage omskrivninger som $3x^3 - 2x^2 - x = x(3x^2 - 2x - 1) = x(x-1)(3x+1)$, hvor det sidste skridt tillige kræver løsning af andengradsligningen $3x^2 - 2x - 1 = 0$.
- se umiddelbart, at $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.
- foretage omskrivningen $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = P(B|A)P(A)/P(B)$, for hændelser A og B, hvor $P(A), P(B) \neq 0$.
- konkludere, at ligningen $x(y+z) = xy+z$ er opfyldt for alle talsæt af formen $(x,y,0)$ for vilkårlige x og y eller af formen $(1,y,z)$ for vilkårlige y og z, men ikke af andre.

Omgang med formelle matematiske systemer

Endelig kan *evnen til at omgås formelle matematiske systemer* illustreres ved indsigt i, hvad det vil sige at foretage geometriske konstruktioner på grundlag af Euklids aksiomer, herunder forståelse af i hvilken forstand det er umuligt at tredele en vinkel med passer og lineal.

Aksiomatisk euklidisk geometri kan tillige tjene som et eksempel på en matematisk formalisme, som ikke behøver at være bragt på symbolsk form.

4.3.3 Kommunikationskompetence – at kunne kommunikere i, med og om matematik

Karakteristik

Forstå og fortolke udsagn og tekster

Udtrykke sig om mat.

Denne kompetence består dels i at kunne *sætte sig ind i og fortolke* andres matematikholdige skriftlige, mundtlige eller visuelle udsagn og "tekster", dels i at kunne *udtrykke sig* på forskellige måder og på forskellige niveauer af teoretisk eller teknisk præcision om matematikholdige anliggender, skriftligt, mundtligt eller visuelt over for forskellige kategorier af modtagere.

Kommentar

Afgrænsning til andre komp.

Eftersom al skriftlig, mundtlig eller visuel kommunikation *i* og *med* matematik må betjene sig af diverse repræsentationsformer (og medier), har denne kompetence et nært slægtskab med den ovenfor omtalte repræsentationskompetence. Oftest vil en sådan kommunikation også betjene sig af matematiske symboler og termer, hvilket understreger forbindelsen til symbol- og formalismekompetencen.

Kommunikationskompetencen går imidlertid videre end de øvrige derved at kommunikationen sker mellem afsendere og modtagere, og at disses situation og forudsætninger tages i betragtning på linje med formål, budskab og medie for kommunikationen.

Der kan også være grund til at hæfte sig ved, at kommunikation *om* matematik ikke behøver at inddrage specifikke matematiske repræsentationsformer.

Eksemplificering

En hvilken som helst skriftlig eller mundtlig fremstilling af en matematisk aktivitet kan tjene til at eksemplificere *udtrykssiden* af kommunikationskompetencen. For eksempel falder det at kunne gøre rede for en matematisk betragtning, fx løsningen af en opgave, inden for denne. Tilsvarende vil afkodningen og fortolkningen af matematiske fremstillinger, fx i en lærebog eller et foredrag, eksemplificere, hvad man kunne betegne *den modtagende side* af kommunikationskompetencen.

Mange udtryksformer

Afkodning og fortolkning

Også evnen til at indgå i diskussioner med andre om matematikholdige emner kræver kommunikationskompetence. Man kunne fx tænke sig følgende dialog udspille sig mellem to elever på sidste trin i folkeskolen eller i gymnasiet:

E_1: "Vi får altid at vide, at vi ikke må dividere med 0. Hvorfor må man egentlig ikke det; er det bare en regel eller hvad?"

E_2: "Ja, det er det vel."

E_1: "Men hvor kommer den så fra? Der må da være en grund."

E_2: "Lad os prøve at se, hvad division går ud på. Hvis vi skulle dividere a med 0, så skulle vi finde det tal, som ganget med 0 giver a. Men et tal ganget med 0 giver jo 0 og ikke a. Så divisionen kan slet ikke lade sig gøre. Det er måske derfor, det er forbudt?"

E_1: "Hov, hvis a er 0 går det jo godt. Så kan man gange 0 med fx 1 og få det rigtige, nemlig 0."

E_2: "Nå ja, vi kunne også have ganget med 10^{10} og stadig få 0. Så ville $0/0$ jo være 10^{10}. "

E_1: "Ja, vi kunne gange med hvad som helst og få det rigtige."

E_2: "Men så kan man vel også godt sige, at divisionen ikke giver noget bestemt resultat, når der kan komme alt muligt ud af den. Og så er den vel også umulig?"

E_1: "OK, det er altså forbudt at dividere med 0, fordi vi aldrig kan få noget bestemt ud af det. I de fleste tilfælde får vi slet ingenting ud af det, og hvis $a = 0$, får vi hvad som helst."

4.3.4 Hjælpemiddelkompetence – at kunne betjene sig af og forholde sig til hjælpemidler for matematisk virksomhed (inkl. it)

Karakteristik

Kende muligheder og begrænsninger ved og kunne betjene sig af hjælpemidler

Denne kompetence består dels i at *have kendskab til* eksistensen og egenskaberne ved diverse former for relevante redskaber til brug for matematisk virksomhed, og have indblik i deres *muligheder og begrænsninger* i forskellige slags situationer, dels i at være i stand til, på reflekteret vis, at *betjene sig af* sådanne hjælpemidler.

Kommentar

Ikke kun it

Matematikken har altid betjent sig af diverse tekniske hjælpemidler, både til at repræsentere og fastholde matematiske sagsforhold og til at håndtere dem, fx i forbindelse med målinger og udregninger. Det drejer sig ikke kun om it, altså lommeregnere og computere (herunder beregningsprogrammer, grafiske tegneprogrammer, computeralgebra og regneark), men også om tabeller, regnestokke, kuglerammer, linealer, passere, vinkelmålere, logaritme- eller normalfordelingspapir m.v. Kompetencen går altså ud på at kunne omgås og forholde sig til sådanne hjælpemidler.

Afgrænsning til andre komp.

Da ethvert sådant hjælpemiddel involverer en eller flere typer af matematisk repræsentation, er hjælpemiddelkompetencen i slægt med repræsentationskompetencen. Da brugen af visse hjælpemidler også ofte er underlagt ret bestemte “spilleregler”, og hviler på bestemte matematiske forudsætninger, har hjælpemiddelkompetencen tillige forbindelser til symbol- og formalismekompetencen.

Eksemplificering

Eksemplerne er utallige

Der er ingen grænser for, hvor mange eksempler man kan give på reflekteret omgang med hjælpemidler for matematisk virksomhed. På de lavere klassetrin kan man nævne evnen til at omgås konkrete materialer til støtte for begrebsdannelsen, undersøgelse af sammenhænge og mønstre, efterprøvelse af hypoteser, grundlæggelse af færdigheder osv. Geoboards, centicubes eller andre klods-, brik- eller stangsystemer, kuglerammer, geometriske skabeloner, spirografer, linealer, passere, vinkelmålere, terninger, særligt indstreget papir, karton til foldning eller udskæring hører alle hjemme i denne sammenhæng.

Vi kan også nævne den tænksomme omgang med lommeregnere og computere, samt it-software af typen LOGO, Cabri-Géomètre, regneark, MathCad, Maple, osv., til brug for såvel kalkulationer som grafiske repræsentationer, empiriske undersøgelser, visualisering osv.

4.4 Fem bemærkninger

4.4.1 Om kompetencernes beslægtethed

Forbindelser og forskelle: Repræsentations-, symbol- og formalisme- og kommunikationskomp.

Som det allerede er fremgået, er flere af kompetencerne i nær familie med hinanden. Det gælder fx repræsentationskompetencen, symbol- og formalismekompetencen samt kommunikationskompetencen, der da også ovenfor er placeret i gruppe sammen. Ikke desto mindre lægger de vægten forskellige steder. I repræsentationskompetencen lægges vægten på *selve repræsentationen* af et matematisk sagsforhold, og de forskellige muligheder der er for at vælge repræsentation. Man kunne sige at repræsentation er en semantisk aktivitet. Nogle af disse repræsentationer kan være symbolske, men de behøver ikke at være det. Symbol- og formalismekompetencen derimod betoner navnlig *"spillereglerne"* i omgangen med symbolsprog og formelle systemer (aksiomatiske teorier), hvilket kan betragtes som en hovedsagelig syntaktisk aktivitet. Endelig er fokus i kommunikationskompetencen på, hvordan man i det hele taget kommunikerer i, med og om matematik. Heri indtager både repræsentationer, symbolsprog og formalismer hver deres plads, men der er vældigt meget andet på færde, ikke mindst inddragelsen af afsendere og modtagere af kommunikationen.

Tankegangs-, ræsonnements- og problembehandlings-komp.

Ligeledes er tankegangs-, ræsonnements- og problembehandlingskompetencerne tæt forbundne, men betoningerne er atter forskellige. I tankegangskompetencen ligger vægten på de *spørgsmål*, matematikken beskæftiger sig med, problembehandlingskompetencen fokuserer på *strategier*, man kan benytte sig af til at besvare spørgsmålene, mens ræsonnementskompetencen angår *retfærdiggørelsen* af påstande, heri indbefattet påstande om at en given fremgangsmåde faktisk leverer en korrekt løsning på et problem, som udspringer af et matematisk spørgsmål. Naturligvis indgår også repræsentationskompetencen og symbol- og formalismekompetencen som redskaber i dette kompleks, men altså netop som redskaber, ikke som selve sagen.

Modellerings-, problembehandlings- og repræsentationskomp.

Til slut kan man blandt de mange familierelationer, som findes mellem kompetencerne, fremhæve forbindelsen mellem modellerings-, problembehandlings- og repræsentationskompetencerne. Således er både repræsentationskompetencen og problembehandlingskompetencen afgørende for udøvelsen af modelleringskompetencen. Men kompetencerne har atter forskellige fokus. Vi har allerede fremhævet de forskellige betoninger i repræsentations- og problembehandlingskompetencerne. I modelleringskompetencen er det brugen af matematik til at forstå og behandle anliggender uden for matematikken selv, der står i centrum.

4.4.2 Om kompetencekarakteristikkernes duale karakter

En "undersøgende" og en "produktiv" side

Som det fremgår af karakteriseringerne, har alle kompetencerne både en "undersøgende" og en "produktiv" side. Den "produktive" side af en kompetence består i, at man *selv kan gennemføre* de processer, kompetencen omfatter. Den "undersøgende" side angår *forståelse, analyse og kritisk bedømmelse* af allerede udførte processer og deres produkter.

Komp. har "adfærdskarakter", men er ikke behavioristiske

Det bør understreges, at også undersøgende virksomhed (refleksion, analyse og bedømmelse) har handlingskarakter, om end den kan foregå på det rent mentale plan. Der er blot tale om en anden slags aktivitet end selve den gennemførelse af de omhandlede processer, som leder frem til produkter, der i en eller anden forstand er "synlige". Både den undersøgende og den produktive side af kompetencerne angår mentale eller fysiske aktiviteter, som har *adfærdskarakter*. Fokus er på, at den, der besidder kompetencen, kan *udføre* de indgående aktiviteter.

At kompetencerne har adfærdskarakter, betyder bestemt ikke, at de skal forstås behavioristisk, dvs. at de nødvendigvis lader sig aflæse udefra som klart afgrænsede og veldefinerede handlinger, der skal forstås som et individs respons på givne stimuli.

4.4.3 Om intuition og kreativitet som tværgående træk ved kompetencerne

Der kan være nogle, der savner visse matematiske kompetencer i listen. Det kan måske være udøvelse af matematisk intuition eller matematisk kreativitet. I den tankegang, der ligger til grund for den her benyttede opstilling, er hverken intuition eller kreativitet selvstændige kompetencer, men kombinationer af træk ved de nævnte kompetencer. Således er "intuition" at finde i navnlig tankegangs-, ræsonnements-, problembehandlings- og repræsentationskompetencerne.

Intuition

Kreativitet

"Kreativitet" kan vel nærmest betragtes som indbegrebet af alle de produktive sider af kompetencerne, altså det at kunne stille gode interne eller eksterne matematiske spørgsmål og formulere deraf udspringende problemer; dernæst ved hjælp af intuition, abstraktion, generalisation, valg af hensigtsmæssige repræsentationer, symbol- og formalismehåndtering, samt eventuelt brug af hjælpemidler, at løse disse problemer; derefter at levere korrekte og fuldstændige argumenter (beviser) for at de foreslåede løsninger virkelig virker, for sluttelig at kommunikere både proces og produkt på en klar og overbevisende måde til en målgruppe.

4.4.4 Om tre dimensioner i besiddelsen af en kompetence

Det forekommer meningsfuldt at operere med, at en persons besiddelse af en kompetence kan have tre dimensioner, som vi i mangel af bedre kan kalde dækningsgrad, aktionsradius og teknisk niveau.

Dækningsgrad

En kompetences *dækningsgrad* hos en person benyttes til at betegne i hvor høj grad de *aspekter*, som karakteriserer kompetencen, er dækket hos den pågældende, dvs. hvor mange af disse aspekter, personen kan aktivere i forskellige foreliggende situationer, og med hvor høj grad af selvstændighed aktiveringen kan ske.

Dækningsgrad angår en komp.'s aspekter

For eksempel har ræsonnementskompetencen hos den person, der ofte er i stand til at forstå andres beviser, men sjældent selv kan udtænke og gennemføre fyldestgørende beviser, en mindre dækningsgrad end hos en person, der ofte er i stand til begge dele. Tilsvarende har kommunikationskompetencen hos en person, der både er i stand til i almindeligt og klart sprog at gøre rede for tankegangen i løsningen af et matematisk problem og til at fremstille løsningen i tekniske termer, større dækningsgrad end hos den, der kun er i stand til det sidste.

Aktionsradius

En kompetences *aktionsradius* hos en person udgøres af det spektrum af *sammenhænge og situationer* personen kan aktivere kompetencen i. Det drejer sig først og fremmest om sammenhænge og situationer, der er bestemt af matematiske emneområder (såvel internt matematiske som anvendte emner), men også om sammenhænge og situationer der er bestemt af problemstillinger og udfordringer.

Aktionsradius angår sammenhænge og situationer

Hvis fx en persons problemløsningskompetence kan aktiveres med succes både inden for aritmetik, algebra, geometri og sandsynlighedsregning, har den større aktionsradius end hos en person, der kun kan aktivere den med succes i aritmetik og algebra. På tilsvarende vis har modelleringskompetencen større aktionsradius hos en person, som kan håndtere anvendelser i matematik i dagligøkonomi, i madlavning og gør-det-selv ombygninger end hos den, som kun kan aktivere kompetencen ved indkøb i supermarkedet.

Teknisk niveau

En kompetences *tekniske niveau* hos en person bestemmes af, hvor *begrebsligt og teknisk avancerede* sagsforhold og værktøjer personen kan aktivere den pågældende kompetence overfor.

Teknisk niveau angår substansen i sagsforhold

Hos den person, der er i stand til at regne korrekt i situationer, hvor der kun optræder to- eller trecifrede hele tal, har symbol- og formalismekompetencen et lavere teknisk niveau end hos den, som tillige kan klare situationer, hvor der optræder mangecifrede tal eller decimaltal. Og den person, der nok kan nå frem til at skitsere grafer for reelle funktioner af én variabel, men ikke for reelle funktioner af to variable, har en repræsentationskompetence på et lavere teknisk niveau end den, som kan begge dele.

Dimensionerne som partielle ikke-kvantitative ordningsprincipper

Hverken en total eller en kvantificerbar ordning

Det er vigtigt at få slået fast, at selv om vi her har valgt nogle ord som antyder muligheden af enkel kvantitativ måling, ligger der ingen antagelse om noget sådant til grund for de følgende betragtninger. Det eneste, vi forudsætter i den henseende, er, at hver af dimensionerne tillader en ordning, dvs. én udgave af en given kompetence kan i henseende til en bestemt dimension være mere eller mindre omfattende, end en anden udgave af den samme kompetence. Eftersom vi kun har at gøre med en partiel ordning, er det ikke sikkert, at to vilkårlige udgaver af den samme kompetence kan sammenlignes på denne måde.

Det giver således ingen mening at sige, at rækkevidden af problemløsningskompetencen hos en person, der kan løse problemer inden for algebra, geometri og sandsynlighedsregning, er mindre, end hos en person der kan løse problemer inden for sandsynlighedsregning, funktioner, infinitesimalregning og optimering. Ligeledes giver det heller ikke uden videre mening at sammenligne det tekniske niveau for symbol- og formalismekompetencen hos en person, der er virtuos til at behandle udtryk inden for fx trigonometri, med det tekniske niveau hos en person, som er virtuos i beregninger vedrørende sandsynlighedsfordelinger.

4.4.5 Om kompetencerne som fagspecifikke, men stofmæssigt generelle

Generelle og sammenfattende, men mat.specifikke

Den femte og sidste bemærkning er måske den vigtigste: Hver af de otte kompetencer er af en generel og sammenfattende natur. De giver mening for (og er derfor uafhængige af) ethvert *konkret* matematisk stof, ligesom de giver mening for ethvert uddannelsestrin. Men de er også specifikke for matematik. Det er muligt, at man kan formulere lignende kompetencer m.v. for andre fagfelter, måske endda med anvendelse af mange af de samme ord. Men elementerne i matematikkompetencerne refererer alle til sagsforhold, som er af specifik matematisk art.

4.5 Overblik og dømmekraft vedrørende matematik som fagområde

"Aktive indsigter" vedr. mat. karakter og rolle i verden

De omtalte kompetencer har som nævnt alle et handlingspræg, derved at de er rettet mod omgangen med forskellige typer af udfordrende matematiske situationer. Udover de sider af matematisk faglighed, som vi med disse kompetencer forsøger at indfange, har vi fundet det ønskeligt at operere med en type "aktive indsigter" vedrørende matematikkens karakter og rolle i verden, som ikke har adfærdspræg i direkte forstand. Skønt disse indsigter udstyrer den, der besidder dem, med et sæt synsmåder, som giver *overblik og dømmekraft over for matematikkens forbindelse til forhold og tilskikkelser i natur, samfund og kultur*, og derved altså også kan siges at have en slags kompetencekarakter, blot rettet mod matematikken som fagområde snarere end mod matematiske situationer, afstår vi fra at kalde dem kompetencer for at undgå forvirrende sammenblanding med de ovenfor behandlede.

Besiddelsen af overblik og udøvelsen af dømmekraft er af væsentlig betydning for dannelsen af et balanceret billede af matematikken, selv om den ikke har adfærdskarakter i nogen simpel forstand. Pointen er altså, at genstanden for denne dømmekraft er matematikken som helhed og ikke specifikke matematiske situationer eller problemstillinger.

Genstanden er mat. som helhed

Det drejer sig om på baggrund af viden og kunnen at besidde overblik og dømmekraft vedrørende a) matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder, b) matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning, og c) matematikkens karakter som fagområde.

Tre slags overblik og dømmekraft

Man kunne måske mene, at der med valget af termerne “overblik” og “dømmekraft” tages nogle store ord i brug, ikke mindst når vi insisterer på, at de giver mening på alle uddannelses- og undervisningstrin. I betragtning af at man aldrig vil kunne tale om “fuldstændigt overblik” og “total dømmekraft”, som nærmest må ses som “punkter i det uendeligt fjerne”, skal begreberne forstås relativt. Derved adskiller de sig jo ikke fra de otte kompetencer, som jo heller aldrig kan besiddes til fuldkommenhed. Det afgørende er, at de perspektiver på matematik som der her er tale om, gøres til genstand for udtrykkelig behandling, refleksion og artikulation.

Punkter i det uendeligt fjerne

4.5.1 Matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder

Karakteristik

Genstanden for denne form for overblik og dømmekraft er den faktiske anvendelse af matematik til udenomsmatematiske formål inden for områder af dagligdags, samfundsmæssig eller videnskabelig betydning. Denne anvendelse kommer i stand og til udtryk gennem bygningen og udnyttelsen af matematiske modeller.

Hvem anvender mat. til hvad?

Kommentar

Mens den tidligere beskrevne modelleringskompetence vedrører evnen til at handle i konkrete udenomsmatematiske situationer og problemstillinger, hvor matematikken bringes i spil, er der her snarere tale om en bred og sammenfattende form for overblik og dømmekraft af en nærmest sociologisk og videnskabsteoretisk art. Det er oplagt, at en veludviklet modelleringskompetence bidrager til en konkret forankring og konsolidering af overblik og dømmekraft, men det er ikke en automatisk følge heraf.

Afgrænsning til modelleringskomp.

Eksemplificering

Sagen kan eksemplificeres af spørgsmål som:

- "Hvem uden for matematikken selv bruger den faktisk til noget?"
- "Til hvad?"
- "Hvorfor?"
- "Hvordan?"
- "Gennem hvilke midler?"
- "På hvilket grundlag?"
- "Med hvilke konsekvenser?"
- "Hvad skal der til for at kunne bruge den?"

4.5.2 Matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning

Karakteristik

Mat.'s udvikling i tid og rum

Genstanden for denne form for overblik og dømmekraft er det forhold, at matematikken har udviklet sig i tid og rum, i kultur og samfund.

Kommentar

Ikke at forveksle med mat.historie

Den form for overblik og dømmekraft, der her er tale om, må ikke forveksles med kendskab til "matematikkens historie" anskuet som et selvstændigt emne. Fokus er på selve det forhold, at matematikken har udviklet sig, i kulturelle og samfundsmæssigt betingede miljøer, og på de drivkræfter og mekanismer som er ansvarlige for denne udvikling. På den anden side er det oplagt, at hvis overblik og dømmekraft vedrørende denne udvikling skal have soliditet, må de hvile på konkrete matematikhistoriske eksempler.

Hvor den førstnævnte form for overblik og dømmekraft kan siges at have et modstykke i en af kompetencerne, er noget tilsvarende ikke tilfældet her. Vi opererer ikke med en "matematikhistorisk kompetence" som en ingrediens i almen matematisk kompetence. Faktisk ville det være muligt at udpege og karakterisere en matematikhistorisk kompetence, men den må betragtes som for speciel til at høre hjemme i en generel sammenhæng.

Eksemplificering

Af interesse er spørgsmål som:

- "Hvordan har matematikken udviklet sig gennem tiden?"
- "Hvad har været de indre og ydre drivkræfter i udviklingen?"
- "Hvilke slags aktører har været indblandet i udviklingen?"
- "I hvilke samfundsinstitutioner har den fundet sted?"
- "Hvordan har samspillet med andre felter været?"

4.5.3 Matematikkens karakter som fagområde

Karakteristik

Mat.'s karakteristika i forhold til andre fagområder

Som fagområde har matematikken sine egne karakteristika. Det er disse karakteristika, der er genstand for den foreliggende type overblik og dømmekraft. Nogle karakteristika har matematikken tilfælles med andre fagområder, andre er den ret alene om.

Kommentar

Samtlige otte kompetencer bidrager til at forankre denne form for overblik og dømmekraft og til at give den kød og blod. Derved er det nok den blandt de tre former for overblik og dømmekraft, som i størst udstrækning ligger i forlængelse af kompetencerne. Pointen er imidlertid, at kun hvis matematikkens særlige karakter som fagområde i sig selv gøres til genstand for belysning og overvejelser, skabes bevidst og artikuleret overblik og dømmekraft.

Kræver artikulation og refleksion

Skulle man fremhæve nogle af kompetencerne som bidragende i særlig grad til at skabe fundament for overblik og dømmekraft vedrørende de *særlige* træk ved matematik, må det blive tankegangs-, ræsonnements- og symbol- og formalismekompetencerne.

Eksemplificering

Der tænkes her på spørgsmål som:

- "Hvad er karakteristisk for matematikkens problemstillinger, tankegange og metoder?"
- "Hvilke slags resultater leverer den, og hvad bruges de til?"

- "Hvilken videnskabsteoretisk status har dens begreber og resultater?"
- "Hvordan er matematikken opbygget?"
- "Hvordan er dens forbindelse til andre discipliner?"
- "På hvilke måder adskiller den sig som videnskab fra andre discipliner?"

4.6 Yderligere bemærkninger

Ikke automatiske konsekvenser af komp.

De betragtede typer af overblik og dømmekraft kan, som det fremgår, ikke automatisk afledes af de otte kompetencer, som er gennemgået ovenfor, men må på den anden side, for at være ordentligt forankrede, hvile på et fundament af disse kompetencer. Det er med andre ord ikke tilstrækkeligt for at besidde overblik og dømmekraft vedrørende matematik, at man har hørt (fortællinger) om matematikkens anvendelse, historiske udvikling og særlige karakter.

Det kan måske forekomme lidt vanskeligt at skelne mellem på den ene side den "undersøgende" del af de otte kompetencer og på den anden side de angivne typer af overblik og dømmekraft, måske navnlig den først- og sidstnævnte. Hovedforskellen er, som antydet, at kompetencerne altid skal tænkes udøvet over for *konkrete* matematiske objekter, problemstillinger eller situationer, mens overblik og dømmekraft her vedrører matematikken som et *samlet* fagområde, der har en særlig karakter, historie og samfundsmæssig placering, og som anvendes uden for sit eget terræn til formål, der ikke i sig selv er af matematisk art.

Generelle og sammenfattende, men mat.specifikke

Som tilfældet var med de otte kompetencer, er også de nævnte typer af overblik og dømmekraft af en generel og sammenfattende natur. Også de giver mening for (og er derfor uafhængige af) ethvert *konkret* matematisk indhold, ligesom de giver mening for ethvert uddannelsestrin, samtidig med at de er specifikke for matematik.

4.7 Anvendelsen af kompetencebeskrivelsen af matematisk faglighed

Et uendeligt spektrum af beherskelsesniveauer

Den enkelte kompetence kan anskues som et uendeligt, tredimensionalt, kontinuert spektrum af beherskelsesniveauer. Det samme gælder for overblik og dømmekraft vedrørende matematik. Besiddelsen af en kompetence, overblik eller dømmekraft er ikke et spørgsmål om enten-eller. Ser vi blot på dækningsgraden, kan man besidde en kompetence på et meget elementært plan, der kun omfatter de mest grundlæggende aspekter af den. Jo flere aspekter af en kompetence man kan aktivere og kombinere, jo flere sammenhænge og situationer man kan bringe den i spil over for, dvs. jo større rækkevidde kompetencen har for én, og jo mere begrebsligt og teknisk avancerede sagsforhold man kan håndtere den i, jo højere er det niveau, hvorpå man besidder denne kompetence.

Derimod kan man aldrig besidde en kompetence, et overblik eller dømmekraft fuldt ud, eftersom der ingen ende er på, hvor dybtliggende, sammensatte og komplicerede sagsforhold den kan angå. Alt dette betyder dog ikke nødvendigvis, at det i praksis er umuligt at foretage mere pragmatiske opdelinger af en kompetence i et mindre antal beherskelsesniveauer, hvis det er det, man ønsker.

4.7.1 Begrebsapparatet anvendt normativt og deskriptivt

Kompetencebeskrivelsen af matematisk faglighed kan nu anvendes til fagbeskrivelse på to forskellige måder.

Normativ brug, fx til fastlæggelse af læseplaner

Den kan anvendes *normativt*, dvs. til beslutninger om, med hvilken vægt og på hvilket beherskelsesniveau de enkelte kompetencer bør være på dagsordenen i en given læseplanssammenhæng på et foreliggende undervisningstrin. Derved bliver kompetencerne et hovedinstrument til fastlæggelse af læseplaner (men ikke det eneste instrument). Denne brug er øjensynlig nært knyttet til forestillinger om formål og mål med undervisningen.

Denne normative brug af kompetencer kunne i princippet godt føre til, at det besluttes, at en eller flere af kompetencerne enten slet ikke skal søges udviklet på et givet undervisningstrin, eller at kun visse træk ved dem skal være på dagsordenen. Det kunne fx være, at nogle af kompetencerne kun optræder i deres undersøgende skikkelse, mens der gives afkald på at betone den produktive side af dem. I den forbindelse er det ikke umuligt, at det i selve *formuleringen* af en læseplan kunne være hensigtsmæssigt at foretage en sammensmeltning af nogle af kompetencerne eller af træk ved dem, for ikke at operere med en større detaljeringsgrad i beskrivelsen end den der efterstræbes i den pågældende sammenhæng.

Deskriptiv brug, fx til belysning af mat.uv.'s realitet

Kompetencerne kan også anvendes *deskriptivt*, dvs. til at beskrive og analysere hvad der faktisk er på færde i en given matematikundervisning, både på læseplansniveau og i den daglige undervisning. Desuden kan de bruges som et hjælpemiddel til detektering og karakterisering af matematiktilegnelsen hos den enkelte elev.

4.7.2 Kompetencebeskrivelsen som metakognitiv støtte

Hjælpemiddel i uv. for lærere og elever

Ud over til *fagbeskrivelse* kan kompetencebeskrivelser bruges som *metakognitiv støtte*, dvs. som hjælpemiddel i den daglige undervisning, både deskriptivt og normativt. Dels kan læreren betjene sig af dem i planlægningen og gennemførelsen af sin undervisning, dels kan de simpelthen gøres til genstand for samtaler og diskussioner mellem lærer og elever, og mellem eleverne indbyrdes, om hvad undervisningen går ud på, og om hvad der faktisk foregår, henholdsvis burde foregå, både på undervisnings- og tilegnelsesplan.

Endelig kan kompetencerne benyttes i lærerens faglige, didaktiske og pædagogiske diskussioner med kolleger.

4.7.3 Kompetencebeskrivelsen som omdrejningspunkt, ikke som stående alene

Stofvalg hviler på mere end komp.

Det er ikke tanken, at kompetencebeskrivelser er det eneste, der er at sige om konkret fagbeskrivelse i en given sammenhæng. Et givet sæt af kompetencer kan fremmes og aktiveres ved beskæftigelsen med en mangfoldighed af helt forskelligt fagligt stof, sådan som det også er antydet i eksemplerne til illustration af de enkelte kompetencer. Hvad dette stof nærmere skal være, kan altså ikke afgøres alene ved betragtning af kompetencerne.

Når vi dertil lægger, at det er de samme kompetencer som – om end med forskellig vægt og prioritering – er på færde på ethvert undervisningstrin, og at undervisningen jo ikke uafbrudt skal beskæftige sig med det samme stof, er det klart, at *valget af det undervisningsstof som kompetencerne skal manifesteres i forhold til* må ske ved inddragelse af yderligere synsvinkler end kompetencerne alene. Til gengæld er det afgørende, at overvejelser over undervisningsstoffets egnethed til at fremme de kompetencer, der programsættes, spiller en væsentlig rolle for beslutningerne om stofvalg.

På tilsvarende måde forholder det sig med valget af *evalueringsinstrumenter*, herunder eksamensformer. Man kan ikke aflede disse instrumenter af kompetencerne, men mange gængse evalueringsinstrumenter tillader kun evaluering af et meget begrænset udsnit af de omtalte kompetencer. Det bliver derfor en hovedopgave at konstruere og implementere evalueringsinstrumenter og -rammer som egner sig til at evaluere kompetencerne.

Uv.aktiviteter til fremme af komp.

Endelig er der hidtil intet sagt om det, som måske ofte er det væsentligste: *De aktiviteter som bringes i spil i en given undervisning*. Der er aktiviteter, som kun i ringe grad egner sig til at fremme opbygningen af hele spektret af kompetencer, mens andre har en større rækkevidde, hvad kompetencer angår. Hvordan sådanne relevante aktiviteter kan udtænkes, kombineres og implementeres, er en hovedopgave for den daglige undervisning, uanset trin. Det er et spørgsmål, som vi skal strejfe i slutningen af denne rapport.

Del III

Uddannelsen af matematiklærere

5 Introduktion til del III

5.1 Behovet for samspil mellem forskellige typer kompetencer

Diskussionen om uddannelsen af matematiklærere rummer sædvanligvis – og i alle lande – et minefelt, når det gælder afvejningen af henholdsvis matematikfaglig bagage og didaktisk og pædagogisk bagage, og ikke mindst en stillingtagen til samspillet mellem dem.

Et minefelt

Her peger, for det første, al forskningsmæssig og anden erfaring på, at det i almindelighed er en helt utilstrækkelig forberedelse til matematiklærerprofessionen kun at tilegne sig matematik som fag, stort set uanset hvilket niveau dette sker på. At der er mange eksempler på excellente matematiklærere, som ikke har anden basis for deres undervisning end matematisk fagkundskab, er sandt, men da de er undtagelsen snarere end reglen, kan de ikke danne grundlag for en alment holdbar strategi. Erfaringen peger i endnu højere grad på, at det ligeledes er en helt utilstrækkelig forberedelse til professionen udelukkende at være udstyret med en generel didaktisk og pædagogisk bagage, uden at der indgår matematiske kompetencer i bagagen.

hverken mat. eller generel didaktisk komp. er tilstrækkelig

For det andet viser mange erfaringer, at det også – i almindelighed – er helt utilstrækkeligt at besidde henholdsvis matematikfaglig og almendidaktisk/-pædagogisk bagage, hvis disse to komponenter alene besiddes i isoleret form uden at blive bragt i samspil med hinanden. Det er med andre ord nødvendigt for at være en god lærer tillige at besidde fagdidaktisk og -pædagogisk kompetence, dvs. en kompetence der bringer matematisk kompetence i samspil med problemstillinger vedrørende undervisning i og læring af matematik.

5.2 Struktureringen af det følgende

På samme måde som vi baserer beskrivelsen af faglighed i matematik på kompetencer, vil vi derfor her gennemføre en tilsvarende beskrivelse af matematiklæreres kompetence. Denne beskrivelse kommer til at indeholde to komponenter.

Den første komponent udgøres af de kompetencer, som ligger i selve udøvelsen af professionen. Man kunne også sige, at den søger at give svar på

"Hvad vil det sige at være en god matematiklærer?"

spørgsmålet "Hvad vil det sige at være en god matematiklærer?", hvilket er et fagdidaktisk/-pædagogisk spørgsmål. Det er altså aldeles forskelligt fra spørgsmålet "Hvad vil det sige at være en god lærer, der desuden kan matematik?". Det sidste er et spørgsmål, som vi ikke finder det relevant at stille.

"Hvilken matematisk kompetence bør den gode matematiklærer have?"

Den anden komponent består af en beskrivelse af den matematiske faglighed, som matematiklæreren bør besidde, dvs. de (aspekter af) matematiske kompetencer, samt de former for overblik og dømmekraft vedrørende matematik som fagområde, han eller hun bør have i bagagen, ikke som borger eller lærer i almindelighed, men netop som matematiklærer. Her spørger vi altså "Hvilken matematisk kompetence bør den gode matematiklærer have?"

Skønt vi i de følgende kapitler beskriver disse to komponenter hver for sig, kan det ikke understreges tydeligt nok, at hos den gode lærer er de integreret i den forstand, at han eller hun både kan anlægge kompetente faglige synsvinkler på ethvert fagdidaktisk eller -pædagogisk problem, og kan tage stilling til de didaktisk/pædagogiske potentialer i de matematiske kundskaber og indsigter han eller hun besidder, samt være i stand til at bringe de to komponenter i integreret samspil i undervisningen.

"Hvordan?" behandles ikke her

I fortsættelse af overvejelser over de kompetencer en god matematiklærer bør besidde, trænger et andet spørgsmål sig på: Hvordan skal disse kompetencer erhverves og udvikles, dels under uddannelsen til lærer, dels undervejs i selve udøvelsen af professionen? Dette spørgsmål er både meget komplekst og meget vigtigt, men vi kan i det store og hele ikke behandle det i denne rapport. Kun kan der være grund til at slå fast, at der med betragtningerne i denne del af rapporten ikke er taget stilling til, *hvordan* matematiklæreruddannelserne nærmere skal indrettes og organiseres. Dette kan ske på mange forskellige, hver for sig frugtbare, måder, og blandt de mange måder der er tale om, har vi altså ikke i dette projekt valgt side til fordel for bestemte.

Karakteriseringen af de didaktiske og pædagogiske kompetencer, som knytter sig til udøvelsen af professionen, er tilstrækkeligt fælles for forskellige læreruddannelser, fra grundskole til universitet, til at denne karakterisering kan gennemføres under ét. Derimod er der med hensyn til den matematiske faglighed brug for en opdeling mellem læreruddannelserne på linje med den, vi i del VII fremlægger for forskellige andre dele af uddannelsessystemet.

6 En kompetencebeskrivelse af matematiklærerfaglighed: Didaktiske og pædagogiske kompetencer

6.1 Indledning

En god lærer besidder en mangfoldighed af almene lærerkompetencer. En god *matematik*lærer, besidder tillige, uanset undervisningstrin, en række specifikke matematikdidaktiske og -pædagogiske kompetencer. De bliver skitseret nærmere nedenfor, hvor vi i øvrigt benytter ordet "elev" som den fælles term for en person, som er i færd med at lære (matematik), uanset om der er tale om en skoleelev eller en universitetsstuderende.

Derimod ser vi det ikke som vores opgave i dette projekt at gå nærmere ind på at karakterisere de almene lærerkompetencer. Så selv om karakteriseringen nedenfor af de omhandlede kompetencer ofte sker i et ordvalg, der ikke specifikt refererer til matematik, er det ikke desto mindre overalt dette fag, der tænkes på. Der er altså ikke tale om generelle fagdidaktiske og -pædagogiske kompetencer. Om det så måtte være muligt at karakterisere faglærerkompetencen i et andet fag i tilsvarende termer, er en sag der helt må afgøres inden for dette fag selv.

Ikke en karakteristik af almene lærerkomp.

Uddannelsen af matematiklærere har til opgave at udstyre dem med følgende didaktiske og pædagogiske kompetencer, som karakteriseres i de følgende afsnit:

- Læseplanskompetence.
- Undervisningskompetence.
- Læringsafdækningskompetence.
- Evalueringskompetence.
- Samarbejdskompetence.
- Professionel udviklingskompetence.

6.2 Læseplanskompetence – at kunne vurdere og udforme læseplaner

Sætte sig ind i og analysere

Denne kompetence består dels i at kunne *sætte sig ind i, analysere og forholde sig til* de til enhver tid gældende og mulige fremtidige rammelæseplaner for matematikundervisningen på de relevante undervisningstrin, og i at kunne *vurdere* sådanne planer og deres betydning for den enkeltes aktuelle undervisning.

Udforme og iværksætte

Dels består den i selv at kunne *udforme og iværksætte* forskellige slags læse- og kursusplaner med forskellige formål og mål og på forskellige niveauer, under iagttagelse af de overordnede rammer og vilkår der måtte foreligge, og både under aktuelle og under forventelige fremtidige forhold.

6.3 Undervisningskompetence – at kunne udtænke, tilrettelægge og gennemføre undervisning

Udtænke, tilrettelægge og gennemføre konkrete undervisningsforløb

Denne kompetence består i med overblik og i samspil med eleverne at kunne udtænke, tilrettelægge og gennemføre konkrete *undervisningsforløb* med forskellige formål og mål.

Heri indgår skabelsen af et spektrum af righoldige *undervisnings- og læringssituationer*, inklusive tilrettelæggelsen og organiseringen af aktiviteter for elever og elevgrupper under hensyntagen til disses *karakteristika og behov.* Dette omfatter også udvælgelse og opstilling af opgaver, såvel som af andre *hverv* og udfordringer for elevernes virksomhed. Der indgår tillige at kunne finde, bedømme, udvælge eller frembringe forskellige slags *undervisningsmidler og -materialer*. Kompetencen omfatter desuden det at kunne *begrunde* og med eleverne *diskutere* undervisningens indhold, form og perspektiver, og at kunne *motivere og inspirere* eleverne til at engagere sig i matematiske aktiviteter, samt at kunne skabe rum for elevernes egne initiativer i matematikundervisningen.

6.4 Læringsafdækningskompetence – at kunne afdække og fortolke elevernes læring

Afdække og fortolke læring, forestillinger og holdninger

Denne kompetence består i at kunne *afdække og fortolke* elevernes faktiske matematiske *læring* og besiddelse af matematiske kompetencer, samt *forestillinger* om og *holdninger* til matematik, herunder at kunne identificere *udviklingen* over tid heri.

I kompetencen indgår at kunne *trænge ind bag facaden* af de måder hvorpå den enkelte elevs matematiklæring, -forståelse og -beherskelse kommer til udtryk i konkrete situationer, i det øjemed at forstå og fortolke den kognitive og affektive baggrund for disse.

6.5 Evalueringskompetence – at kunne afdække, vurdere og karakterisere elevernes faglige udbytte og kompetencer

Denne kompetence består i at være i stand til at udvælge eller konstruere, samt betjene sig af, et bredt spektrum af former og *instrumenter til afdækning og vurdering* af elevers og elevgruppers faglige udbytte og matematiske kompetencer, både *undervejs* i undervisningen og ved *afslutningen* af den, og både i *absolut* og i *relativ* forstand.

Udvælge eller konstruere, samt betjene sig af evalueringsinstrumenter

Heri indgår også evnen til *kritisk at forholde sig til* holdbarheden og rækkevidden af konklusioner erhvervet ved anvendelsen af de enkelte evalueringsinstrumenter. Denne kompetence er en forudsætning for løbende evaluering, dvs. evaluering gennemført undervejs i undervisningen, og indebærer også evnen til at *karakterisere* den enkelte elevs udbytte og kompetencer og at kunne *kommunikere* med eleven om de gjorte observationer og fortolkninger og *hjælpe* denne til at korrigere, forbedre eller videreudvikle sine matematiske kompetencer. Det samme gør sig gældende ved afsluttende evaluering, herunder eksamener, selv om vejledningen i denne situation ofte har en anden karakter.

6.6 Samarbejdskompetence – at kunne samarbejde med kolleger og andre om undervisningen og dens rammer

Denne kompetence består for det første i at kunne samarbejde med kolleger, både *fagkolleger* og *kolleger i andre fag*, om anliggender af betydning for matematikundervisningen. Heri indgår evnen til at bringe samtlige fire ovennævnte kompetencer i spil i faglige, pædagogiske og didaktiske samarbejdsprojekter og i diskussioner med forskellige typer af kolleger.

Kolleger

For det andet omfatter kompetencen evnen til at indgå i samarbejde *med personer uden for den kollegiale verden*, fx elevernes forældre, administrative instanser, myndigheder osv. om rammerne for undervisningen.

Forældre, administration, myndigheder m.fl.

6.7 Professionel udviklingskompetence – at kunne udvikle sin kompetence som matematiklærer

Denne kompetence består i at kunne udvikle sin matematiklærerkompetence. Den er med andre ord en slags *meta-kompetence*.

Den består nærmere bestemt i at *kunne indgå i og forholde sig til aktiviteter* som kan tjene til udviklingen af den faglige, didaktiske og pædagogiske kompetence,

Indgå i og forholde sig til udviklende aktiviteter under hensyntagen til skiftende betingelser, omstændigheder og muligheder. Det drejer sig om at kunne *reflektere over sin undervisning* og diskutere denne med fagkolleger, om at kunne *identificere udviklingsbehov*, og om at kunne vælge eller foranstalte samt bedømme aktiviteter som kan fremme den ønskede udvikling, hvad enten der er tale om eksterne *efter- og videreuddannelseskurser*, *konferencer* eller om *kollegiale projekter* og aktiviteter som fx deltagelse i studiekredse og forskningsprojekter. Det drejer sig også om at *holde sig á jour* med nye tendenser, nye materialer og ny litteratur på ens felt, om at drage nytte af relevante forsknings- og udviklingsbidrag, og måske om at *skrive* artikler eller bøger af faglig, didaktisk eller pædagogisk art.

7 Matematiklæreres matematiske kompetencer

7.1 Generelle kommentarer

7.1.1 Uddannelsen af lærere til grundskolen

I Danmark er uddannelsen til grundskolelærer en professionsrettet uddannelse. Det vil sige, at lærerstudiet er en specifik forberedelse (hos os desuden ved en særlig slags uddannelsesinstitution) til en bestemt profession, ikke et alment studium der bl.a. kan lede til ansættelse i grundskolen som én blandt en række erhvervsmuligheder.

En professionsrettet uddannelse

Som bekendt er dette ikke den eneste mulige måde at indrette en læreruddannelse på. Alternativt kan man, som tilfældet er i nogle lande og i Danmark ved uddannelsen af lærere for de gymnasiale uddannelser, have en mere eller mindre almen fagrettet uddannelse, som så gennem forskellige didaktiske, pædagogiske eller undervisningspraktiske tillægskomponenter kvalificerer til ansættelse som lærer. Der knytter sig mange store spørgsmål af kulturel, politisk, økonomisk, organisatorisk, didaktisk og pædagogisk art til en diskussion om indretningen og placeringen af læreruddannelserne. Det ville være nyttigt for det danske samfund at sætte en sådan grundlæggende diskussion på dagsordenen, med skyldig hensyntagen til den tid, de kræfter og de ressourcer, der skal til, hvis diskussionen skal blive kvalificeret.

De strukturelle rammer er nyttigt at diskutere

Vi har ikke set det som vores opgave i sammenhæng med dette projekt at tage hul på en sådan diskussion. Derfor tages de store organisatoriske linjer i indretningen og institutionstilknytningen af grundskolelæreruddannelsen for givet. Det er imidlertid vores vurdering, at betragtningerne i denne rapport vil være robuste over for selv ganske omfattende organisatoriske forandringer af læreruddannelsessystemet i Danmark.

... men vi gør det ikke her

Som tilfældet generelt er med matematikkompetencer på de højere trin af uddannelsessystemet, er det vores opfattelse, at en grundskolelærer i matematik bør besidde de otte matematikkompetencer og de tre former for overblik og dømmekraft vedrørende matematik som fagområde med fuld dækningsgrad. Hermed er intet sagt om kompetencernes aktionsradius eller begrebslige og tekniske niveau. Der er

Komp. har fuld dækningsgrad

som bekendt heller intet sagt om det faglige stof, kompetencerne skal udøves i forhold til. Det er en sag, som kræver selvstændig stillingtagen, sådan som det tages op i kapitel 8.

7.1.2 Uddannelsen af lærere til de gymnasiale og de videregående uddannelser

En almen universitetsuddannelse

Uddannelsen af lærere i matematik til de gymnasiale og videregående uddannelser i Danmark finder i alt væsentligt sted på universiteterne. I de seneste ca. fire årtier har det typisk forholdt sig sådan, at de kommende lærere til disse trin har modtaget en almen universitetsuddannelse med matematik som fag, hvor professionen som lærer blot har været én blandt flere muligheder for fremtidigt erhverv. Tidligere har uddannelserne kun i enkelte tilfælde (fx ved RUC og AAU) rummet momenter, der kunne forberede de studerende specifikt på en profession som lærer, men i de senere år har sådanne momenter i stigende grad vundet indpas ved universiteterne i almindelighed. Samtidig er der sket en udvikling på pædagogikumfronten i retning af opgradering af ikke blot den undervisningspraktiske forberedelse til professionen, men også til dens fagdidaktiske sider, ligesom der fra Undervisningsministeriets side er formuleret visse indholdskrav til universitetsuddannelsen, som forudsætning for at få tildelt formel kompetence (i betydningen autorisation) som lærer i det almene gymnasium og hf. På HHX og HTX er ansættelsesgrundlaget noget bredere, og det er i vid udstrækning op til forstanderne at afgøre, hvad der skal til for at bestride undervisningen.

Didaktiske momenter vinder indpas

Ved universiteternes undervisning har der traditionelt ikke været nogen pædagogiske eller didaktiske krav til lærerne. Men i de senere år er der sket den ændring, at adjunkter skal gennemgå et særligt universitært pædagogikum for at kunne søge ansættelse som lektor.

De strukturelle rammer diskuteres ikke her

Også på de her betragtede områder er der mange, hver for sig fornuftige, muligheder for at indrette uddannelsen af kommende lærere i matematik. Man kan både indrette fortræffelige uddannelser, hvor didaktisk-pædagogiske komponenter er en del af selve universitetsuddannelsen, og uddannelser, hvor sådanne komponenter først behandles i et efterfølgende forløb. Vi skal afstå fra at fremsætte synspunkter på, under hvilke strukturelle rammer didaktiske og pædagogiske komponenter bedst kan bringes i samspil med matematisk kompetence. Det afgørende er, som fremhævet i det foregående kapitel, at dette faktisk sker på seriøs vis.

Komp. har fuld dækningsgrad

Det giver sig selv, at også lærere på gymnasiale og videregående uddannelser med fuld dækningsgrad bør besidde de otte kompetencer og de tre former for overblik og dømmekraft vedrørende matematik.

7.1.3 Tilbage til det generelle

Komp. skal vise sig i undervisningen

Set i forhold til professionen som matematiklærer, uanset trin, skal kompetencerne først og fremmest komme til udtryk i sammenhænge og situationer, der aktuelt har, eller potentiel kunne få, relevans i forhold til matematikundervisningen. Vi har derfor valgt i den nedenstående gennemgang af lærerens matematikkompetencer at forbinde den komplette kompetencekarakteristik med kommentarer og eksempler, dels på lærerens egne kompetencer, og dels på lærerens udøvelse af den enkelte kompetence i forhold til sin profession som matematiklærer. Det sker bl.a. ud fra den forudsætning, at det giver sig selv, at matematiklærerens matematiske kompetence i alle dimensioner skal indbefatte kompetencerne hos de elever, han eller hun kan komme til at undervise, og at han eller hun derudover skal besidde et sådant kompetencemæssigt overskud, at han eller hun kan udøve de matematiklærerkompetencer, som er beskrevet i kapitlet herom. De eksempler, som fremdrages, er bevidst valgt, så de angår lærere ved forskellige undervisningstrin.

Ofte har man diskuteret, i hvilken grad matematiklæreren bør besidde fagligt overskud for at kunne varetage sin profession på tilfredsstillende vis. Det er jo ikke mindst et politisk og økonomisk spørgsmål om læreruddannelse og arbejdsforhold. Efter arbejdsgruppens opfattelse er det ikke desto mindre essentielt, at matematiklærerens faglige ballast rækker betydeligt ud over evnen til at undervise i det stof, der aktuelt er sat på dagsordenen på de enkelte uddannelsestrin, som det fx kommer til udtryk i gængse (og til tider kritisable) lærebøger. Kun gennem et betragteligt fagligt overskud, som vi her formulerer ved hjælp af de matematiske kompetencer, læreren bør besidde, kan denne blive i stand til at løfte de opgaver, matematiklærerprofessionen, som beskrevet ovenfor, rummer.

Fagligt overskud er essentielt

Uddannelsen af lærere i matematik har, uanset hvordan den konkret finder sted, til opgave at udstyre dem med nedennævnte matematiske kompetencer. Disse er, som sædvanlig, eksemplificeret hver for sig. Ud over de nedenfor anført eksempler, er også de eksempler, som i Del VII er anført i kapitlerne om grundskolen, det almene gymnasium og universitetsuddannelserne i og med matematik af relevans i denne sammenhæng.

Til slut skal det bemærkes, at vi nedenfor fortsat refererer til modtagerne af matematikundervisning som elever, også når der er tale om studerende.

7.2 Matematiske kompetencer hos matematiklærere

7.2.1 Tankegangskompetence

Karakteristik

Arten af spørgsmål og svar

Denne kompetence består for det første i at *være klar over*, hvilke slags spørgsmål som er karakteristiske for matematik, i selv at kunne *stille sådanne spørgsmål*, og i at *have blik for hvilke typer af svar* som kan forventes. Af særlig vigtighed er her matematikkens efterstræbelse af nødvendige og tilstrækkelige betingelser for et objekts besiddelse af en given egenskab.

Begrebers rækkevidde

Den består tillige i at *kende*, *forstå* og *håndtere* givne matematiske *begrebers rækkevidde* (og begrænsning) og deres forankring i diverse domæner, i at kunne udvide et begreb ved *abstraktion* af egenskaber i begrebet, i at kunne *forstå* hvad der ligger i *generalisering* af matematiske resultater, og selv at kunne generalisere sådanne til at omfatte en større klasse af objekter.

Forskellige slags mat. udsagn

Denne kompetence omfatter også det at kunne *skelne*, både passivt og aktivt, mellem *forskellige slags matematiske udsagn* og påstande, herunder "betingede udsagn", "definitioner", "sætninger", "fænomenologiske påstande" om enkelttilfælde, og "formodninger" baseret på intuition eller erfaringer med specialtilfælde. Af særlig betydning er her forståelsen af den rolle eksplicitte eller implicitte "kvantorer" spiller i matematiske udsagn, ikke mindst når de kombineres.

Didaktiske og pædagogiske kommentarer

Grundlæggende fagligt overblik

For at kunne arbejde som matematiklærer på et hvilket som helst undervisningstrin, som altid lægger op til anlæggelse af en række forskellige faglige synsvinkler, er det vigtigt at have en grundlæggende indsigt i, hvilke typer af spørgsmål og svar, som hører hjemme netop i undervisningsfaget matematik på det pågældende trin. Endvidere er det i forbindelse med fx igangsættelse af fagligt relevant virksomhed hos eleverne vigtigt ikke alene selv at kunne formulere sådanne spørgsmål og udtænke mulige svar, men også at have en fornemmelse af hvilke typer af svar, der kan forventes af elever på et givet trin.

Abstraktioner og generaliseringer

Ofte vil elevernes egne iagttagelser og resultater være knyttet til konkrete situationer og enkelttilfælde. Det er derfor vigtigt, at læreren med udgangspunkt i sådanne situationer og enkelttilfælde er i stand til at bringe arbejdet blandt eleverne videre, ved at kunne foretage begrebslige abstraktioner samt udlede og fremhæve generelle egenskaber og sammenhænge.

Skelne mellem typer af elevudsagn

Med henblik på at skabe klarhed i undervisning og læring, må læreren kunne afgøre, hvornår foreliggende betingelser optræder som nødvendige og/eller tilstrækkelige for et objekts besiddelse af en given egenskab. Endvidere er det væsentligt, at læreren er i stand til at afgøre, om elever fx er i færd med at navngive matematiske objekter eller med at udtale sig om egenskaber ved sådanne.

Eksemplificering

Karakteristiske undervisningsrelevante spørgsmål

Eksempler på karakteristiske undervisningsrelevante spørgsmål, som det er vigtigt, at læreren kan forholde sig til – og selv formulere, men ikke nødvendigvis besvare – kunne være:

A: "Findes der brøker, som ikke kan omskrives til decimaltal?"

B: "Nej."

A: “Findes der decimaltal som ikke kan omskrives til brøker?”

B: “Ja, fx π.”

A: “I en sædvanlig kasse er summen af de tre vinkler i et hjørne jo 270°. Er det altid tilfældet med et legeme ‘bygget af’ seks parallellogrammer?”

B: “Nej. Man kan have vinkelsummen i et sådant ‘3-hjørne’ lige så lille, det skal være, når blot summen er positiv, og lige så tæt på 360° det skal være, så længe summen er under – men ikke på – 360°.”

A: “Hvor mange rationale tal findes der, set i forhold til de naturlige tal?”

B: “Lige så mange (når vi har truffet en bestemt beslutning om hvad lige mange betyder).”

A: “Findes der, ligesom for 1. og 2. gradsligninger, en tilsvarende formel for løsningen af en generel n’te gradsligning?”

B: “Nej, det gør der ikke.”

A: “Hvorfor kaldes de hyperbolske funktioner egentlig hyperbolske, og hvorfor indgår der cos, sin osv. i betegnelserne for dem?”

B: “Det skyldes for det første, at der gælder den ‘hyperbolske idiotformel’ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, som på den ene side viser, at punktet $(\cosh x, \sinh x)$ altid ligger på en hyperbel, og som på den anden side minder om den sædvanlige idiotformel for cos og sin (der forresten bevirker, at disse i visse sammenhænge kaldes cirkelfunktioner). For det andet er $\cosh' = \sinh$, $\sinh' = \cosh$, $\tanh' x = \frac{1}{\cosh^2 x}$ osv. Disse geometriske og trigonometriske slægtskabsforbindelser er baggrunden for navngivningen.”

Det er ligeledes vigtigt, at læreren er i stand til at klargøre, at fx ethvert realistisk forventeligt svar på et spørgsmål om befolkningens gennemsnitsindkomst et bestemt år må fremkomme ved beregning, altså ved en matematisk procedure, ikke ved måling. Heroverfor lægger et spørgsmål som “Hvornår var 1. verdenskrig?” eller “Hvor mange fuglearter findes der i verden?” op til svar bestående af tal, men hverken spørgsmålet eller svaret er karakteristiske for matematik.

Fagligt overskud

Som et eksempel på fagligt overskud i denne sammenhæng kan man nævne behovet for, at læreren kan stille sig spørgsmål som “Hvorfor kan man tillade sig at udtage 30 10-stikprøver ud af en mængde på 10 000 uden tilbagelægning, og så foretage beregninger ud fra en binomialfordeling, der jo forudsætter stikprøveudtagningen med tilbagelægning? Er det fordi 30 10-stikprøver udgør så lille en del af 10 000, at det ikke spiller nogen rolle, om de lægges tilbage igen?” Et andet eksempel kunne være “Hvorfor er det egentlig, at man for sandsynligheder på uendelige sandsynlighedsfelter forlanger σ-additivitet og ikke blot additivitet?”.

Kender til, forstår og kan håndtere matematiske begrebers rækkevidde og begrænsning

Betydningen af at læreren *kender til, forstår og kan håndtere matematiske begrebers rækkevidde og begrænsning*, samt abstraktion, kan illustreres med en tænkt dialog mellem en lærer og en elev:

E: “Vi ved, at i et kvadrat er alle fire sider lige lange. Hvis nu alle fire sider i en firkant er lige lange, kan man så være sikker på, at den er et kvadrat?”

L: “Lad os se på sagen. Hvad skal der til, for at vi kalder en figur et kvadrat?”

E: “Så skal den være et rektangel, hvor alle siderne er ens?”

L: “Ja, og der siges du noget, ud over at siderne skal være ens, nemlig hvad?”

E: “At figuren skal være et rektangel.”

L: “Og hvad betyder det?”

E: “At alle fire vinkler er rette.”

L: “Hvad skal der så alt i alt til for at være et kvadrat?”

E: “Figuren skal have fire ens sider og fire rette vinkler.”

L: “Ja. Kan man så forestille sig en figur på fire ens sider, men ikke fire rette vinkler?”

E: “Nå ja, hvis man trykker et kvadrat sammen i to modstående hjørner, uden at ændre på siderne – forstår du hvad jeg mener? – er figuren ikke længere et kvadrat, men den har stadig fire ens sider.”

L: “Nemlig. Man kan altså godt have firkanter med lige lange sider, uden at der behøver at være tale om kvadrater. De kaldes rhomber.”

E: “Så er et kvadrat altså en rhombe, men en rhombe behøver ikke at være et kvadrat?”

L: “Netop!”

Her er et andet eksempel:

E: “Jeg har hørt, at man kan tale om eksponentialfunktionen af komplekse tal. Kan det virkelig passe?”

L: “Ja, det passer. Man beslutter, at hviz z er det komplekse tal $z = x + iy$, er $\exp(z) = \exp(x)[\cos x + i \sin y]$, hvor alle funktionerne på højresiden er de kendte reelle, og hvor i er den imaginære enhed. Men man kan jo ikke være bekendt at kalde en nydefineret funktion for noget kendt, hvis ikke der er en forbindelse til det kendte. Men det er der faktisk. For det første, hvis z er reel, dvs. hvis $y = 0$, stemmer den nye funktion overens med den gamle. For det andet kan man vise, at den nye funktion opfylder en række egenskaber, som er karakteristiske for den reelle eksponentialfunktion, hvoraf en af de vigtigste er, at $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$."

Et eksempel på gymnasieniveau på udvidelsen af matematiske begrebers rækkevidde har vi, når man går fra at definere sinus, cosinus og tangens for vinkler i retvinklede trekanter til vinkler placeret i en enhedscirkel, og siden til argumenter i $\mathbf{R}$.

Når det gælder om at *fremme forståelsen af, hvad der ligger i generalisering* kunne læreren

Fremme forståelsen af, hvad der ligger i generalisering

- tage udgangspunkt i enkelteksempler som $1+3 = 4$, $3+6 = 9$, og $6+10 = 16$, og stimulere eleverne til at generalisere til formodningen "summen af to på hinanden følgende trekantstal er altid et kvadrattal".
- arbejde med generalisering (ikke nødvendigvis godtgørelse) af påstanden $0,99999\ldots = 1$ til $T,99999\ldots = T+1$ for ethvert naturligt tal T.
- sætte sine elever til at undersøge, hvor mange af den reelle eksponentialfunktions egenskaber, der også gælder for den komplekse.

Det er vigtigt for læreren at kunne hjælpe eleverne til at *skelne mellem forskellige slags matematiske udsagn*, fx i forhold til at

Skelne mellem forskellige slags matematiske udsagn

- skelne mellem definitionen på højderne i en trekant og den sætning (korrekte påstand), at højderne i en trekant altid skærer hinanden i samme punkt. Og mellem denne påstand og påstanden (som ligeledes er korrekt) om, at også medianerne skærer hinanden i samme punkt.
- forstå at påstande som "Hvis $-1 \leq x \leq 1$, må $1-x^2 \geq 0$" og "En funktion, der er differentiabel i et punkt, er også kontinuert i punktet" er formodninger indtil de er bevist.
- afgøre hvilke af påstandene der er hhv. nødvendige og tilstrækkelige i udsagn som "Da firkant *ABCD* er et parallellogram, halverer firkantens diagonaler hinanden" (at vide/indse at påstandene faktisk er ækvivalente, kræver specifikke geometriske kundskaber, som ikke kan indfanges alene af tankegangskompetencen) og "Eftersom vinklen v ligger i intervallet $]\pi/2, \pi[$, har vi $\cos v = -\sqrt{1-\sin^2 v}$."

7.2.2 Problembehandlingskompetence

Karakteristik

Opstille og løse problemer

Denne kompetence består dels i at kunne *opstille*, dvs. detektere, formulere, afgrænse og præcisere forskellige slags matematiske problemer, "rene" såvel som "anvendte", "åbne" såvel som "lukkede", dels i at kunne *løse* sådanne matematiske problemer i færdigformuleret form, egnes såvel som andres, og om fornødent eller ønskeligt på forskellige måder.

Didaktiske og pædagogiske kommentarer

Egen fortrolighed

For at kunne igangsætte og lede læreprocesser af undersøgende, eksperimenterende og problemløsende art blandt eleverne er det i første omgang vigtigt, at læreren selv er fortrolig med sådanne processer. Erfaringsmæssigt finder mange lærer- og universitetsstuderende det til at begynde med vanskeligt at arbejde problemløsende, for ikke at tale om problemopstillende. På den baggrund bør formulering og løsning af matematiske problemer være et gennemgående træk i forberedelsen til matematiklærerprofessionen.

Hjælpe eleverne

Som tilrettelægger af undervisnings- og læringsaktiviteter må læreren kunne opstille og formulere problemstillinger og spørgsmål, som kan give anledning til problemløsende virksomhed hos eleverne. Det indgår heri i at kunne udpege, vælge, formulere og præcisere en mangfoldighed af matematiske problemer, som i forhold til forskellige elevgrupper kan give anledning til en sådan virksomhed. Det siger sig selv, at læreren selv skal være fortrolig med at løse sådanne problemer. Og i betragtning af, at eleverne ofte har meget forskellige forudsætninger, er det særlig betydningsfuldt, at læreren er i stand til at anlægge forskellige strategier over for behandlingen af et foreliggende problem, og til at hjælpe eleverne til at gribe det an fra en række forskellige vinkler, afhængigt af deres forudsætninger.

Eksemplificering

Løse færdigformulerede, lukkede problemer

Når det gælder evnen til at *løse færdigformulerede, lukkede problemer* med potentiel anvendelse i matematikundervisningen, er det vigtigt, at læreren har en stor fond af erfaringer, også ud over hvad der (kan) tages op på det givne trin. Som eksempler herpå kunne nævnes:

- "Udtryk på talmæssig form forholdet mellem stykkerne i en linje AC opdelt af punktet B sådan, at forholdet mellem hele linjen og det største af stykkerne er det samme som forholdet mellem det største og det mindste af stykkerne" (det gyldne snit).

- "Hvad er mest fordelagtigt, ved køb af en vare med rabat, at få rabatten før eller efter tillæg af moms?"
- "Bestem summen af alle de firecifrede tal som kan dannes af forskellige cifre, valgt blandt $1,2,3,4,5,6,7,8,9$."
- "Hvornår står den store og den lille viser første gang efter kl. 12 i direkte forlængelse af hinanden?"
- "Bestem dimensionerne i papirark i A-format, når disse er defineret ved, at $A0$ er 1 m^2, og ved, at $A(N+1)$ fremgår af AN ved halvering vinkelret på den længste side."
- "Lad punktet P være et indre punkt i en halvcirkelskive. Konstruer P's projektion på diameteren med lineal alene."
- "Bestem alle funktioner $f:\mathbf{R}\mapsto\mathbf{R}$, som opfylder, at $f(x)-f(y)\leq(x-y)^2$ for alle $x,y\in\mathbf{R}$."
- "En lærebog indeholder følgende opgave: 'Vi betragter en retvinklet trekant, hvis hypotenuse er 8, mens højden på den er 5. Hvad er arealet?' Opgaven indeholder en fejl. Find denne."

Formulering og præcisering af et problem

Et eksempel på lærerens *formulering og præcisering af et problem*, som kan danne udgangspunkt for eleveres undersøgende arbejde med flisemønstre, kunne være, "Hvad skal der gælde for en regulær polygon, hvis den skal udgøre det eneste grundelement i et dækkende flisemønster?", og videre "Hvad kan man fx sige om antallet af kanter i polygonen?".

En mere *åben problemstilling* som udgangspunkt for elevaktivitet kunne være spørgsmålet:

- "Hvor mange forskellige firkanter med arealet 2, kan der bygges på et sømbræt?"
- "Hvad vil være en hensigtsmæssig placering af et kulturhus på landet, når afstanden for beboerne i gårde og huse med kendt placering skal være så lille som mulig?" (et eksempel på en problemstilling, der kræver præcisering fra elevernes side).
- "Hvad kan man sige om forholdet mellem to på hinanden følgende tal langt ude i en såkaldt Fibonacci-følge $a,b,a+b,a+2b,2a+3b,\dots$?"

Håndtere på flere forskellige måder

Som et eksempel på et rent og relativt lukket matematisk problem, som læreren bør have kompetence til at *håndtere på flere forskellige måder*, kunne nævnes:

- "Hvor stor en fejl begår man egentlig ved at tilnærme omkredsen af en cirkel med omkredset af en ligesidet n-kant?"

som fx kan præciseres til

- "Hvad er differensen mellem omkredsen af en cirkel med radius r og omkredsen af en indskrevet, ligesidet n-kant udtrykt ved hjælp af r og n, og hvornår er fejlen ved at erstatte cirklens omkreds med n-kantens omkreds mindre end fx 1%?"

Et andet eksempel på, at en række forskellige angrebsmåder kan komme på tale over for et opstillet problem, er at bede eleverne tage udgangspunkt i $1,2,3\ldots n$ punkter i planen, hvoraf ikke tre ligger på samme linje, og søge svar på spørgsmålet "Hvor mange forskellige trekanter med hjørner i de n punkter kan der tegnes?". Her er det vigtigt, at læreren kan betjene sig af eller forholde sig til flere forskellige løsningsstrategier (simple optællinger, systematiserede optællinger, egentligt kombinatoriske tællemetoder, udledning af "mønstre" i antallet af trekanter for konkrete, stigende værdier af n).

Endnu et eksempel:

- "Anne er 8 år, og hendes mor er 38. De har fødselsdag samme dag. Hvilken alder har moderen, når hun er tre gange så gammel som datteren?"

Problemet kan enten løses ved opstilling af ligningen $38+x=3(x+8)$, hvor x er datterens alder; eller ligningerne $y=3x$ og $y-x=30$, hvor y er moderens alder, x datterens. Man kan også vælge at tage udgangspunkt i den konstante aldersdifferens på 30 år og konstatere, at når moderen er 3 gange så gammel som datteren, må differensen være den dobbelte af datterens alder, som derfor må være 15 år. Lærerens problembehandlingskompetence bør også række til at assistere eleverne med at behandle udvidelser af den oprindelige problemstilling, fx til "Hvornår er moderen fem gange så gammel som datteren?".

7.2.3 Modelleringskompetence

Karakteristik

Modelanalyse

Denne kompetence består på den ene side i at kunne *analysere* grundlaget for og egenskaberne ved foreliggende modeller og at kunne bedømme deres rækkevidde og holdbarhed. Hertil hører at kunne "*afmatematisere*" (træk ved) foreliggende matematiske modeller, dvs. at kunne afkode og fortolke modelelementer og -resultater i forhold til det felt eller den situation som er modelleret. På den anden side består

Modelbygning

kompetencen i at kunne *udføre aktiv modelbygning* i en given sammenhæng, dvs. at bringe matematik i spil og anvendelse til behandling af anliggender uden for matematikken selv.

Elementer i modelbygning

Aktiv modelbygning indeholder en række forskellige elementer. Først at kunne *strukturere* det felt eller den situation der skal modelleres. Dernæst at kunne gennemføre en *matematisering* heraf, dvs. en oversættelse af objekter, relationer, problemstillinger m.v. til et område af matematikken, resulterende i en matematisk model. At kunne *behandle* den opståede model, herunder løse de matematiske problemer den måtte give anledning til, samt at kunne *validere* den færdige model, dvs. bedømme dens holdbarhed både internt (i forhold til modellens matematiske egenskaber) og eksternt (dvs. i forhold til det felt og den situation modellen omhandler). Der indgår tillige at kunne *analysere modellen kritisk*, både i forhold til dens egen brugbarhed og relevans og i forhold til mulige alternative modeller, og at kunne *kommunikere* med andre om modellen og dens resultater. Endelig indgår det i aktiv modelbygning at have *overblik* over og kunne *styre* den samlede modelleringsproces.

Didaktiske og pædagogiske kommentarer

Analysere og vurdere andres brug af matematik

Det er væsentligt, at en matematiklærer kan igangsætte og lede elevers arbejde, såvel med foreliggende modeller (fx fra skolebøger eller andre publikationer, fx artikler) som med aktiv modelbygning af enkle situationer. Læreren må derfor selv være i stand til at analysere og vurdere andres brug af matematik til anvendelsesformål og til selv at bringe matematik i anvendelse i forhold til problemstillinger og situationer i omverdenen.

Afkode og fortolke modeller og modelelementer

En væsentlig, men traditionelt også meget vanskelig, side af matematisk modellering i undervisningssammenhæng er elevers etablering og erkendelse af relationerne mellem på den ene side foreliggende modeller, eller elementer i sådanne, og på den anden side de situationer og omstændigheder som er modelleret. Det er derfor vigtigt, at læreren selv er fortrolig med at kunne afkode og fortolke modeller og modelelementer.

Beherske modelleringsprocessen

Når det gælder elevernes eget arbejde med matematisk modellering, vil det i mange situationer være nødvendigt eller hensigtsmæssigt at udvælge visse dele af modelleringsprocessen (fx afkodning af elementer i en foreliggende model i forhold til en given situation) som genstand for undervisning. Læreren må derfor selv beherske de delprocesser (strukturering af situationen, matematisering, fortolkning, validering osv.), der indgår i en modelleringsprocess, og han/hun må, med henblik på udvælgelse og vurdering af sværhedsgraden i de enkelte processer, også være i stand til at skabe sig overblik over den samlede proces i konkrete situationer.

Eksemplificering

Analysere grundlaget for og egenskaberne ved modeller

Når det gælder lærerens evne til at *analysere grundlaget for og egenskaberne ved foreliggende (eller foreslåede) modeller* af potentiel relevans for skolen, og at kunne bedømme deres rækkevidde og holdbarhed, kan man fx betragte rimeligheden af at benytte et “plat-og-krone”-baseret eksperiment til at simulere fordelinger af drenge og piger i børnefamilier. Eller binomialfordelingen $b_{13,\frac{1}{3}}$ som grundlag for at vurdere chancen for forskellige typer af gevinst i tips.

Andre eksempler kunne være at forstå og bedømme grundlaget for at bruge den preskriptive body-mass-index model (BMI = $\text{vægt}[kg]/(\text{højde})^2[m^2]$) for undervægt, normalvægt, overvægt og fedme af mennesker. Eller de preskriptive modeller for takstsystemet for taxakørsel, frankeringstakster på breve, satssystemet for indkomstskat, fastlæggelse af den effektive rente ved obligationskøb m.m.m.

Afmatematisering af en model

Et eksempel på *afmatematisering af en model* kunne være at fortolke sammenhængen mellem nedbør og vindforhold ud fra en korrelationskoefficient, der er beregnet ud fra observationer af vindforhold og nedbør gennem en bestemt periode. Eller at kunne udrede relationen mellem, på den ene side, elementerne i formlen

$$f(n) = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

og, på den anden side, en annuitetsopsparing.

Bedømmelse af foreliggende matematiske modellers egenskaber er af særlig betydning for en reflekteret vurdering af deres holdbarhed. Som fx følsomheden over for ændringer af de indgående parametre af Danmarks Statistiks model for en langtidsbefolkningsprognose for Danmark.

Aktiv modelbygning

Hvad angår *aktiv modelbygning*, kan man fx tænke sig projektprægede aktiviteter, der tager udgangspunkt i følgende eksempel:

A's bil har en aktuel værdi på 20000 kr. Skal den bringes i en forsvarlig stand, må den repareres for ca. 10000 kr., hvorefter den formodentlig kan holde i to år endnu. Er det en god løsning at få den repareret, eller skal A hellere købe en ny bil straks? Her indbefatter modelbygningen det at kunne

- strukturere en situation, der her består i at identificere de afgørende komponenter af betydning for modelbygningen, såsom af priser på ny biler, lånebetingelser, afskrivning på hhv. nye og gamle biler osv..

- gennemføre en matematisering af situationen og en behandling af denne, der her kunne bestå i at beregne udgifter for de næste to år for hhv. en ny og en gammel bil, og beregne værdiforringelse efter to år på begge biler og sammenligne disse beregninger.

- validere modellen ved fx at vurdere om der undervejs er sket uhensigtsmæssige forenklinger.

- analysere modellen kritisk, fx ved at vurdere mulighederne for yderligere reparationsomkostninger på den gamle bil, inddrage spørgsmål om benzinforbrug, sikkerhed, behagelighed m.m..

- kommunikere med andre om modellen og dens resultater, fx ved at kunne redegøre for problemstillingen, den valgte undersøgelsesform, og ved at være i stand til at begrunde konklusionen med inddragelse af relevante forbehold for rækkevidden af den.

Andre eksempler kunne være opstilling af en model til besvarelse af spørgsmål som

- “Hvor langt er der til horisonten, når man står og ser ud over havet?”
- “Hvor høj er ‘denne’ skorsten?”
- “Hvordan kan grundplanen for et hus se ud, hvis dets areal skal være 120 m^2?”
- “Hvor dyrt er det at tale i mobiltelefon?”
- “Er det muligt, at gennemsnitsalderen i en befolkning er 35 år, samtidig med at mindst 40% af befolkningen er 60 eller derover?”
- “Bagerkasser er foldet/udskåret af et rektanguært stykke karton. Ved hvilke dimensioner af en sådan kasse rummer den mest?”

7.2.4 Ræsonnementskompetence

Karakteristik

Følge og bedømme ræsonnementer

Denne kompetence består på den ene side i at kunne *følge* og *bedømme* et *matematisk ræsonnement*, dvs. en kæde af argumenter fremsat af andre på skrift eller i tale til støtte for en påstand, specielt at vide og *forstå* hvad et matematisk *bevis* er, og hvordan det adskiller sig fra andre former for matematiske ræsonnementer, fx heuristiske ræsonnementer hvilende på intuition eller på betragtning af specialtilfælde, og at kunne afgøre hvornår et matematisk ræsonnement faktisk udgør et bevis, og hvornår ikke. Heri indgår at forstå den logiske betydning af et *modeksempel*. Det indgår tillige i kompetencen at kunne *afdække de bærende idéer i et matematisk bevis*, herunder skelne mellem hovedpunkter og detaljer, mellem idéer og teknikaliteter.

Forstå hvad et bevis er

Udtænke og gennemføre

På den anden side består kompetencen i at kunne *udtænke og gennemføre* informelle og *formelle ræsonnementer* (på basis af intuition), herunder omforme heuristiske ræsonnementer til egentlige (gyldige) beviser.

Didaktiske og pædagogiske kommentarer

Generelt er det en meget central del af en (matematik)lærers virksomhed at kunne sætte og leve sig ind i elevers måde at tænke og, ikke mindst, ræsonnere på. Når eleverne skal lære at foretage selvstændige matematiske ræsonnementer af den art, som omfattes af ræsonnementskompetencen, er det således vigtigt, at læreren er i stand til at sætte sig ud over sine egne argumenter, både med henblik på at følge, karakterisere, kommentere og bedømme elevernes ræsonnementer, og med henblik på at hjælpe dem til at udvikle deres matematiske ræsonneringsformåen.

Sætte sig ud over egne argumenter

I den daglige undervisning vil elevernes ræsonnementer og slutninger ofte være fragmentariske. For at sådanne elevbidrag skal kunne indgå konstruktivt i den videre undervisning, er det vigtigt, at læreren med overblik og fleksibilitet er i stand til eventuelt at omforme og skærpe ræsonnementerne og på passende steder bringe elementer af egentlig bevisførelse ind i billedet.

Omforme og skærpe ræsonnementer

I grundskolen er det ikke altid muligt eller aktuelt at føre egentlige beviser for matematiske påstande. I stedet forklares, illustreres og sandsynliggøres mange påstande. I den forbindelse er det essentielt, både at læreren selv er i stand til at skelne mellem, hvornår et ræsonnement har karakter af et bevis, og hvornår der "blot" er tale om en god forklaring eller illustration, og at han/hun er i stand til at hjælpe eleverne til at foretage en sådan skelnen.

Beviser

Der er i grundskolen grænser for, hvor dybtgående og detaljeret man kan arbejde med matematisk bevisførelse. Det er derfor væsentligt, at læreren i undervisningen kan fokusere på og formidle grundlæggende idéer ved beviser uden nødvendigvis at medtage alle detaljer. Det kræver, at han/hun i disse sammenhænge er i stand til at afdække bærende idéer og til at styre, i hvilket omfang mere tekniske sider af et bevis skal indgå i undervisningen i en konkret sammenhæng.

Op igennem de gymnasiale og de videregående uddannelser optræder behandling af beviser og aktiv bevisførelse med stigende intensitet og vægt. Her er det bl.a. en vigtig opgave for læreren at hjælpe eleverne med at forstå og tage stilling til, hvornår et bevisforslag er korrekt og fuldstændigt på det foreliggende grundlag.

Eksemplificering

Følge og bedømme matematiske ræsonnementer

En lærers evne til at kunne *følge og bedømme elevers matematiske ræsonnementer* kunne fx illustreres med følgende tænkte dialog med en elev:

E: "Jeg har fundet ud af, at 3, 7 og 9 går op i et tal, hvis de går op i tallets tværsum."

L: "Javel, hvordan kan du overbevise mig om det?"

E: "Jo, hvis du tager fx 642 og 231, så går 3 både op i tværsummerne 12 og 6 og i tallene selv. Og 133, 455, og 511 har tværsummer som 7 går op i, og 7 går også op i tallene selv. Og hvis du tager fx tallene 297 og 2376, så går 9 op i tværsummen og også i tallene."

L: "Dine eksempler er gode nok, men virker det altid?"

E: "Ja, gør det ikke? Jeg har nogle flere eksempler, men dem har jeg bare ikke vist dig."

L: "Prøv at se på tallet 16. Passer din påstand på det?"

E: "Næ, 7 går op i tværsummen, men ikke i 16."

L: "Har du så overbevist mig?"

E: "Næ, det har jeg vel ikke. Men måske er det fordi 16 er 2-cifret. Alle mine eksempler har flere cifre end to. Måske passer det for sådan nogle tal."

L: "Hvad med 1616?"

E: "Nå nej. 7 går op i tværsummen, men ikke i tallet. Så det passer altså kun nogle gange med 7, men ikke altid. Men så med 3 og 9 da? Kan man bevise det?"

L: "Ja, det kan man faktisk. Men det er lidt svært at gøre rede for alle detaljerne helt generelt."

Lærerens egen kompetence skulle gøre det muligt for ham/hende at fortsætte dialogen således, selv om den næppe kunne finde sted i mange grundskoleklasser:

L: "Så lad os nøjes med at se på fx 3-cifrede tal. Man kan gribe sagen an på samme måde for andre antal cifre. Hvad er egentlig et 3-cifret tal $a_2a_1a_0$? Ja, det er jo et tal, som i virkeligheden har formen $a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$. Hvad betyder det – at fx 9 går op i et tal?"

E: "At tallet kan skrives som 9 gange et andet tal."

L: "Nemlig. At 9 går op i tværsummen betyder altså, at $T = a_2 + a_1 + a_0 = 9d$, hvor d er et eller andet naturligt tal; tilsvarende med 3. Lad os nu se på vores 3-cifrede tal. Det kan vi skrive på en lidt snedig måde, nemlig sådan her:

$$\begin{aligned} a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 &= a_2(99+1) + a_1(9+1) + a_0 \\ &= 99a_2 + a_2 + 9a_1 + a_1 + a_o \\ &= 9 \cdot (11a_2 + a_1) + T \end{aligned}$$

Hvis nu 9 går op i T, som vi forudsatte, har vi i alt at

$$\begin{aligned} a_2a_1a_0 &= a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 \\ &= 9 \cdot (11a_2 + a_1) + T \\ &= 9 \cdot (11a_2 + a_1) + 9d \\ &= 9 \cdot (11a_2 + a_1 + d) \end{aligned}$$

Men det viser, at tallet kan skrives som 9 gange et naturligt tal. Med andre ord går 9 op i tallet. Havde vi nu set på 3 i stedet, havde vi kunne argumentere lige sådan. For 3 går jo op i $9 \cdot (11a_2 + a_1)$ (det går jo op i 9), og hvis 3 også går op i T, går det altså op i det samlede tal."

E: "Det kunne jeg aldrig selv have fundet ud af."

L: "Nej, det regnede jeg bestemt heller ikke med; det ville være for meget forlangt. Men måske kunne du nu prøve med 4-cifrede tal?"

Lærerens evne til at aktivere et modeksempel på "sokratisk" vis er centralt i første del af denne dialog. Noget tilsvarende kunne forekomme med et tænkt elevforslag om, at hvis to trekanter har en vinkel, en hosliggende og en modstående side fælles, må de være kongruente.

Forstå hvad et bevis er og hvornår noget ikke er et bevis

At bringe eleverne i stand til at *forstå hvad et bevis er og til at kunne afgøre, hvornår et matematisk ræsonnement faktisk (ikke) udgør et bevis*, kan eksemplificeres ved at bede eleverne udpege – og om muligt rette – fejlene i ræsonnementerne

- "Det forholder sig sådan, at knap 70% af befolkningen ikke kommer på bibliotekerne, nemlig 39% af mændene og 30% af kvinderne."
- "Undersøgelser viser, at 60% af gymnasieeleverne er piger. Med andre ord går 60% af pigerne i de berørte aldersgrupper i gymnasiet."
- "Der gælder at $1 = 0$. Vi har nemlig formlen $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, og hvis vi her dividerer på begge sider med $a-b$, får vi jo $a+b = {(a^2-b^2)}/{(a-b)}$. Tager vi nu $a = b = 1/2$, er venstresiden åbenbart 1 (eftersom $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$), mens højresiden åbenbart er 0, fordi tælleren er 0. Der gælder jo, at $a^2 - b^2 = 0$, når $a = b$. Ergo er $1 = 0$." (Ræsonnementet er forkert fordi $a - b = 0$, når $a = b$, og det er forbudt at dividere med 0. Undertrykkelsen af dette problem er pointen i "snyderiet").

Et andet eksempel kunne være at vise, hvor og hvordan et klassisk geometrisk bevis for, at de tre højder eller de tre medianer i en trekant skærer hinanden i samme punkt, adskiller sig fra en illustration fremskaffet ved et dynamisk geometriprogram på en computer.

Afdække de bærende idéer i et (korrekt) bevis

Lærerens evne til at assistere eleverne med at *afdække de bærende idéer i et (korrekt) bevis* kan illustreres således:

- "Gauss' bevis for at $1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ hviler på den idé, at man kan bestemme summen ved hjælp af en ligning. Ved at lægge tallet $n + \ldots + 2 + 1$ til venstresiden fås dels den søgte sum to gange, dels n parenteser hver bestående af to tal, hvis sum er $n + 1$. At udnytte dette til at udtrykke summen er derefter teknik (multiplikation af n med $n + 1$ efterfulgt af løsning af en enkel ligning)."

- "Der findes mange forskellige beviser for algebraens fundamentalsætning (som siger, at ethver komplekst polynomien har en (kompleks) rod). Et af de mest gængse hviler på den idé, at et n'te grads polynomium $P(z)$, opfattet som (kontinuert) kompleks funktion, må opfylde, at $|P(z)|$ går mod ∞ for $|z|$ gående mod ∞. Det bevirker, at der findes en afsluttet cirkelskive $S = \{z \,|\, |z| \leq r\}$, sådan at P uden for denne udelukkende antager værdier, som er numerisk større end en passende positiv konstant. Den kan altså ikke have nogen rødder uden for cirkelskiven. På S, som er kompakt, antager $|P|$, der jo er kontinuert, en mindsteværdi. Var nu denne mindsteværdi positiv, kan man opnå en modstrid med de foreliggende fakta, idet man samtidig kan indse – men det kræver lidt teknik – at $\inf\{|P(z)| \,|\, z \in S\} = 0$. Ergo, må den antagne mindsteværdi være 0, hvilket viser, at P har en rod i S og dermed i $\mathbf{C}$."

Endelig kan lærerens rolle ved *selvstændig bevisførelse*, fra heuristik til formelt bevis, illustreres med bestræbelser på at bevise følgende påstande: Selvstændig bevisførelse

- "Summen af to på hinanden følgende trekanttal er altid et kvadrattal."
- "7 må være den hyppigst forekommende sum af øjnene i et kast med to terninger", og at præcisere de forudsætninger påstanden og beviset hviler på.
- "Antallet af permutationer af et sæt genstande må være større end antallet af kombinationer af det samme sæt" (et eksempel på at et korrekt bevis ikke behøver at kræve symbolske manipulationer).
- "Der findes uendeligt mange rektangler, hvor omkredsen og arealet har den samme værdi. Alle sådanne rektangler må have sidelængder, der begge er større end 2."
- "Vi har et stykke kvadratisk papir $ABCD$, som foldes over en normal gennem midtpunkt M af siden BC. Derefter foldes papiret over en endnu ubestemt skrå linje, sådan at hjørnet A ender i M. Foldningslinjen går gennem et punkt F på siden AB. Derved dannes en retvinklet trekant $\triangle FBM$. Denne trekant er altid en 3-4-5-trekant."
- "De funktioner $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, der opfylder uligheden

  $$f(x) - f(y) \leq (x - y)^2$$

  for alle $x, y \in \mathbf{R}$ er netop de konstante funktioner."
- "De tre medianer i en vilkårlig trekant har et fælles skæringspunkt" opbygget som et geometrisk bevis, fx med udgangspunkt i iagttagelser af enkelttilfælde.

7.2.5 Repræsentationskompetence

Karakteristik

Forstå og betjene sig af forskellige repræsentationer

Denne kompetence består dels i at kunne *forstå* (dvs. afkode, fortolke og skelne mellem) og *betjene sig af* forskellige slags repræsentationer af matematiske objekter, fænomener, problemer eller situationer (herunder symbolske, specielt algebraiske, visuelle, geometriske, grafiske, diagrammatiske, tabelmæssige eller verbale repræsentationer, men også konkrete repræsentationer ved materielle objekter), dels i at kunne forstå de indbyrdes *forbindelser* mellem forskellige repræsentationsformer for det samme sagsforhold og have kendskab til deres styrker og svagheder, herunder informationstab og -tilvækst, dels i at kunne *vælge* blandt og *oversætte* imellem forskellige repræsentationsformer for et givet sagsforhold, alt efter situation og formål.

Vælge og oversætte mellem repræsentationer

Didaktiske og pædagogiske kommentarer

Spredningen i elevernes forudsætninger

Hvis en lærer skal varetage kvalificeret matematikundervisning, er det vigtigt, at han/hun, med henblik på at kunne tilgodese en sammensat elevgruppes meget forskellige baggrunde og forudsætninger, kan belyse og behandle matematiske begreber, emner og problemstillinger på mange forskellige måder og iværksætte elevvirksomhed på det grundlag. En vigtig forudsætning for dette er, at læreren selv har kendskab til og kan betjene sig af et bredt spektrum af matematiske repræsentationer, og at han/hun kan forholde sig til og bidrage til udviklingen af elevernes brug af sådanne repræsentationer.

Vurdere repræsentationsformers styrker og svagheder

Lærerens repertoire af repræsentationsformer er imidlertid ikke kun væsentlig i forhold til spredningen i elevernes forudsætninger. Det er også vigtigt at kunne bringe en række repræsentationer i spil med henblik på belysning af et givet sagsforhold, og i den forbindelse at kunne vurdere repræsentationernes styrker og svagheder, bl.a. med det formål at kunne prioritere imellem dem, også i en undervisningssammenhæng.

"En rød tråd" i undervisningen

Af vigtighed er det tillige, at læreren i forhold til den ofte brogede elevskare, og af hensyn til den alsidige belysning af begreber og emner, formår at skabe og bevare "en rød tråd" i undervisningen ved at knytte forbindelser mellem de forskellige repræsentationsformer.

Eksemplificering

De første år af grundskolen

Et eksempel af relevans for de første år af grundskolen på denne kompetence kunne være lærerens evne til, over for eller sammen med eleverne, at finde repræsentationer af naturlige tal i form af tegnede streger, prikker o.a., eller klodser af ens form og størrelse, eller opskrivning af tal i positionssystemet ved hjælp af cuisenairestænger, centicubes, kuglerammer eller lignende og ved hjælp af symboler i sædvanlig hindu-arabisk notation, romertal, m.v., samt ved verbal repræsentation (eks. fem-millioner-ethundredeogseksogtyvetusinde-nihundredeogsyvogtredive).

Et andet eksempel fra mindre børns verden er tidsangivelser, hvor viserure og digitalure leverer ækvivalente, men helt forskellige repræsentationer af det samme klokkeslet.

Længere fremme i uddannelsessystemet

Længere fremme i uddannelsessystemet kunne sagen dreje sig om at forstå og håndtere forskellige repræsentationer af objektet π og forbindelserne imellem dem. Objektet kan repræsenteres såvel ved selve dette symbol, fx på en lommeregner, som ved en uendelig decimalbrøk $3,14159265\ldots$, eller en rational tilnærmelse (med deraf følgende unøjagtighed) med fx brøkerne $^{22}/_{7}$ eller $^{223}/_{71}$. Men π kan også repræsenteres geometrisk som omkredsen af en cirkel med diameter 1. På videregående trin er π fx repræsenteret som summen af forskellige uendelige rækker, eller som en værdi dannet ud fra diverse omvendte trigonometriske funtioner, fx $4 \arctan 1$. I sådanne forbindelser er det vigtigt, at læreren kan bidrage til, at det bliver klart for eleverne, hvilken repræsentation der kan være på tale, når de i forskellige sammenhænge stilles over for andres påberåbelse af objektet π.

Et andet eksempel kunne være at skelne mellem og sammenholde repræsentationerne af en parabel som henholdvis grafen for et andengradspolynomium, et plant geometrisk sted givet ved ledelinje og brændpunkt, og et bestemt snit i henholdsvis en matematisk kegle og i en lyskegle, fx frembragt af en lommelygte holdt i en passende stilling i forhold til en væg.

Forstå og håndtere indbyrdes forbindelser

Som et gennemgående eksempel på betydningen af at kunne forstå og håndtere de indbyrdes forbindelser mellem forskellige repræsentationsformer for det samme sagsforhold, og at kunne pege på deres respektive styrker og svagheder, kan nævnes repræsentation af funktioner ved regneforskrifter, grafer, tabeller, regneark osv.

En illustration kan være en funktion, der, repræsenteret på forskellig vis, beskriver udviklingen af et bankindlån på 100 kr. forrentet med 5% p.a.:

- Som tabel:

x	0	1	2	...	...
y	100	105	110,25	...	...

- Som regneforskrift: $f(x) = 100 \cdot 1,05^x$.

- Som en eksponentielt voksende graf.

- I et regneark baseret på den frembringende rekursive relation $f(x+1) = f(x) \cdot 1,05$.

En beslægtet illustration kan være, at læreren i en given sammenhæng kan vurdere brugbarheden af, og om ønskeligt vælge imellem, den direkte formel $y = G \cdot {}^{r}\!/_{[1-(1+r)^{-n}]}$ og rekursionsformlen $G_{ny} = G_{gl} + G_{gl} \cdot r - y$ til at repræsentere vigtige sammenhænge mellem de centrale størrelser i en gældsannuitet.

Konsolidere forståelsen af mat. resultater

Et eksempel på, at vekslingen mellem repræsentationer af læreren kan bruges til at konsolidere forståelsen af matematiske resultater, er sammenhængen mellem omskrivninger som $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ og arealbetragtninger baseret på opdeling af et kvadrat med siden $a+b$ i delkvadrater og -rektangler.

På tilsvarende måde kan uligheden mellem de geometriske og det algebraiske gennemsnit af to ikke-negative tal x, y illustreres geometrisk på følgende måde: Afsættes x og y som linjestykker i forlængelse af hinanden, tegnes en halvcirkel med det sammensatte stykke som diameter, og oprejses normalen til diameteren i delepunktet mellem linjestykkerne til skæring med cirkelperiferien i punktet P, opstår en retvinklet trekant. Højden h fra P er mellemproportional mellem x og y, dvs. h er netop det geometriske gennemsnit af x og y. Højden er åbenbart højst radius i cirklen, altså $\frac{x+y}{2}$. Dermed gælder, at $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$. Det er just indholdet i uligheden for to variable. Dette eksempel er tillige velegnet til at diskutere fordele og ulemper ved sådanne repræsentationer i forhold til hinanden.

7.2.6 Symbol- og formalismekompetence

Karakteristik

Afkode, oversætte og behandle symbolholdige udsagn

Formelle matematiske systemer

Denne kompetence består dels i at kunne *afkode* symbol- og formelsprog, i at kunne *oversætte* frem og tilbage mellem symbolholdigt matematisk sprog og naturligt sprog, og i at kunne *behandle og betjene sig af* symbolholdige udsagn og udtryk, herunder formler. Dels i at *have indsigt i* karakteren af og "spillereglerne" for formelle matematiske systemer (typisk aksiomatiske teorier).

Didaktiske og pædagogiske kommentarer

Afkode symbol- og formelsprog

På alle trin skal læreren gennem egne beskrivelser, forklaringer, illustrationer og konkretiseringer, såvel som gennem skabelse af situationer for elevvirksomhed, kunne støtte elevernes arbejde med mere eller mindre abstrakte symbolholdige udtryk. Som grundlag for det må læreren naturligvis selv være fortrolig med at kunne afkode symbol- og formelsprog.

"Oversætte"

Dette må i høj grad bygge på lærerens og elevernes brug af naturligt sprog. Derfor er det væsentligt, at han/hun er i stand til selv at oversætte frem og tilbage mellem symbolholdigt matematisk sprog og naturligt sprog, og til at kunne stimulere elevernes tilsvarende oversættelser.

Opstille, omforme og anvende symbolholdige udtryk

At opstille, omforme og anvende (herunder fortolke) symbolholdige udtryk er erfaringsmæssigt særdeles vanskeligt for mange elever på næsten alle trin. For at kunne forstå eleverne og deres ofte meget forskellige vanskeligheder, og for at kunne hjælpe dem med at overvinde disse, må læreren selv kunne håndtere sådanne udtryk med betydelig sikkerhed og overskud, og med et overblik der gør ham/hende i stand til at handle fleksibelt og effektivt i undervisningssituationerne. Dette er der ikke mindst brug for, når læreren skal kunne forstå, assistere og stimulere elever, som har et vaklende eller uortodokst, opfindsomt, eller måske ligefrem skabende, forhold til symbolske manipulationer.

Spillereglerne for formelle mat. systemer

Betydningen af, at læreren har indsigt i karakteren af og spillereglerne for formelle matematiske systemer, ligger på grundskoletrinnene først og fremmest i, at læreren har brug for at kunne trække på viden om, hvad der "i sidste instans" kan danne grundlaget for de matematiske begrebsdannelser, som er på dagsordenen i grundskolen. På videregående trin er sådanne systemer selv genstand for undervisning, hvorfor læreren selvsagt også må besidde de træk ved kompetencen, som angår formelle matematiske systemer.

Eksemplificering

Det elementære plan

På det elementære plan er det væsentligt, at læreren kan hjælpe eleverne med at komme til klarhed over vilkårene for omgang med tal og talbehandling, inklusive aritmetiske udregninger. Det kan dreje sig om

- at bringe dem til forstå positionssystemet i opskrivningen og aflæsningen af tal som 406.
- konventionerne i at man ikke har lov til at skrive $6 + \cdot 5$ eller $6 - -3$ (mens $6 + +3$ ikke er meningsløst, men dårlig syntaks).
- at $5 \cdot (3+4)$ ikke er det samme som $5 \cdot 3 + 4$.
- at $\left(2^3\right)^4$ ikke er det samme som 2 opløftet til 3^4, men det samme som 2^{12}, og generelt, at x^{y^z} pr. konvention betyder $x^{(y^z)}$.
- at $4 < 7$ er et udsagn og ikke et udtryk.
- hvad der menes med $n!$, med $7/9$ eller med $7,423423423\ldots$.
- hvorfor man ikke (i skolen!) kan uddrage kvadratroden af et negativt tal, mens dette bliver muligt inden for de komplekse tal.

Senere trin

På senere trin kan det dreje sig om for læreren at få eleverne til at forstå spillereglerne for omgang med koordinatsystemer, hvilket fx indebærer at kunne

- Fortolke $\{(x,y) | x = t, y = 3t - 7, t \in \mathbf{R}\}$ som mængden af alle reelle talpar, hvor førstekoordinaten antager en vilkårlig reel værdi, mens andenkoordinaten er bundet til at være netop tre gange denne værdi, minus 7.

- Analysere funktionsforskriften $f(x) = ax^2 + bx + c$ algebraisk for alle koefficientsæt a, b og c med henblik på at kunne udtale sig om, hvilken betydning koefficienterne har for funktionsgrafens beliggenhed i et koordinatsystem.

Af særlig betydning er lærerens evne til at få eleverne til at forstå, at bortset fra hvad der gælder nogle få faste symboler, er der ret frit slag med symbolsk navngivning af matematiske størrelser, når blot forskellige størrelser ikke kaldes det samme, og den samme størrelse (helst) ikke kaldes noget forskelligt i den samme symbolsammenhæng. Men også at det ikke desto mindre er nogle i princippet helt tilfældige konventioner, som gør, at bestemte slags størrelser ofte kaldes noget bestemt, som når koefficienter, konstanter og parametre gerne navngives med bogstaver i begyndelsen af alfabetet, mens variable kaldes x, y, z, osv. Det er imidlertid væsentligt for lærere også at kunne håndtere situationer, hvor der helt brydes med disse konventioner.

"Oversætte"

Oversættelse mellem symbolholdigt matematisk sprog og naturligt sprog kan illustreres med lærerens klarlæggelse af

- at identiteten $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ både udsiger at to vilkårlige tals sum gange de samme to tals differens er lig differensen mellem tallenes kvadrater, og – omvendt – at differensen mellem to tals kvadrater er det samme som produktet af tallens sum og differens.
- at $P(n,r) = K(n,r) \cdot r!$ udsiger, at antallet af måder, hvorpå r elementer kan udtages blandt n, sådan at der tages hensyn til elementernes rækkefølge, er det samme som antallet af måder, hvorpå man kan udtage r elementer blandt de n, uden hensyn til rækkefølgen, multipliceret med antallet af måder hvorpå r elementer kan omordnes i forskellige rækkefølger.
- at formlen $K(n,r) = K(n,n-r)$ blot udtrykker at antallet af valg af r elementer blandt n stks er det samme som antallet af (fra)valg af $n-r$ blandt de n.
- i naturligt sprog at kunne forklare, hvad formler som

  $$K_n = K(1+r)^n \quad \text{og} \quad \frac{d\ln(\sin^2 x)}{dx} = 2\cot x$$

  udtrykker, og hvad der er forskellen på

  $$\int_0^1 \sin t \exp t\,dt \quad \text{og} \quad \int \sin t \exp t\,dt\,.$$

Et udbredt problem på gymnasiale og videregående trin er elevers tendens til ubekymret og jævnt hen fejlagtig brug af logiske symboler til at skabe forbindelse mellem matematiske udsagn på symbolsk eller dagligsproglig form. Noget lignende gør sig gældende med symboler hentet fra mængdelæren. Læreren bør være i stand til at hjælpe eleverne til at nærme sig en korrekt og hensigtsmæssig anvendelse af sådanne symboler.

Behandling og udnyttelse af symbolholdige udsagn og udtryk kan fx bestå i, at læreren ved hjælp af egnede spørgsmål kan hjælpe en elev frem til

- ud fra formlen for volumenet af en cirkulær cylinder – $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ – at kunne afgøre, hvorvidt en fordobling af radius eller af højden giver anledning til den største ændring af volumenet.
- at kunne omforme andengradsligningen $ax^2 + bx + c = 0$ således, at de eventuelle løsninger
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
fremkommer.
- generelt at kunne genkende $\int f(g(t))g'(t)\ dt$ som funktionen $t \mapsto F(g(t))$, hvor F er en stamfunktion til f, og specielt, at $\int \frac{f'(t)}{f(t)}\ dt = \ln|f(t)|$ (forudsat, at de optrædende integrander er integrable).

Endelig kan lærerens evne til at hjælpe eleverne med at omgås formelle matematiske systemer illustreres ved vilkårene og reglerne for omgang med de reelle tal, herunder med behandling og løsning af ligninger og uligheder, og med indsigt i, hvad det vil sige at foretage geometriske konstruktioner på grundlag af Euklids aksiomer, herunder forståelse af i hvilken forstand (ikke hvorfor!) det er umuligt at tredele en vinkel med passer og lineal. For øvrigt kan aksiomatisk euklidisk geometri tjene som et eksempel på en matematisk formalisme, som ikke behøver at være bragt på symbolsk form.

Omgang med formelle mat. systemer

7.2.7 Kommunikationskompetence

Karakteristik

Denne kompetence består dels i at kunne *sætte sig ind i og fortolke* andres matematikholdige skriftlige, mundtlige eller visuelle udsagn og "tekster", dels i at kunne *udtrykke sig* på forskellige måder og på forskellige niveauer af teoretisk eller teknisk præcision om matematikholdige anliggender, skriftligt, mundtligt eller visuelt over for forskellige kategorier af modtagere.

Forstå og fortolke udsagn og tekster

Udtrykke sig om mat.

Didaktiske og pædagogiske kommentarer

Det er i sagens natur en helt central kvalifikation hos en lærer, at han/hun er i stand til at indgå i et kommunikativt fagligt samspil med eleverne.

Sætte sig ind i og fortolke

Det betyder for det første, at læreren må kunne sætte sig ind i og fortolke såvel skriftlige som mundtlige udsagn fra eleverne; herunder må han/hun være i stand til at forholde sig til forskellige elevers udtryksformer, som kan variere meget med hensyn til fx sprogbrug, teoretisk niveau og præcision. For det andet betyder det, at læreren selv må være i stand til at udtrykke sig om matematiske anliggender på varieret måde, såvel skriftligt og mundtligt som visuelt, idet han/hun søger at tilpasse udtrykket til eleverne og til de øvrige omstændigheder i undervisningssituationen. Variationen må blandt andet omfatte faglig sprogbrug og dens præcisionsniveau, kombination eller vekslen mellem tekst, tale, visuelle illustrationer, og andre former for udtryk.

Selv kunne udtrykke sig

Derudover er det vigtigt, at læreren kan hjælpe eleverne til at udvikle og udbygge deres kommunikationskompetence ved at gøre forskellige kommunikationsformer og -midler til genstand for undervisning.

Vurdere uv.-materialer

Læreren må tillige være i stand til at vurdere fremstillingen og kommunikationskvaliteten af faglige emner i diverse slags undervisningsmaterialer, ikke mindst i lærebøger.

kommunikere med kolleger og andre

Endelig er det vigtigt, at læreren kan kommunikere på fleksible måder med kolleger i og uden for faget og med fx forældre om matematikundervisningens perspektiver, problemstillinger, indhold og metoder.

Eksemplificering

Kommunikere med elever

Til illustration af lærerens evne til at *kommunikere med elever om basale matematiske anliggender* kunne man fx tænke sig følgende dialog udspille sig mellem en lærer og en elev på de sene trin i grundskolen:

E: "Du siger altid, at vi ikke må dividere med 0. Men jeg tror ikke vi har fået at vide, hvorfor man ikke må det; er det bare en regel eller hvad?"

L: "Ja, det er det faktisk."

E: "Men hvor kommer den så fra? Der må da være en grund."

L: "Lad os prøve at se, hvad division går ud på. Hvis vi skulle dividere fx 1 med 0, så skulle vi finde det tal, som ganget med 0 giver 1. Men et tal, lige meget hvilket, ganget med 0 giver jo 0 og ikke 1. Så divisionen kan slet ikke lade sig gøre. Heller ikke hvis jeg havde valgt alle mulige andre tal end 1."

E: "Nåh ja. Men hvad nu hvis vi dividerer 0 med 0, så går det jo godt. Så kan man gange 0 med fx 10 og få det rigtige, nemlig 0!"

L: "Du har ret, det havde jeg lige glemt. Vi kunne også have ganget med 10^{10} og stadig få 0! Så ville $^0\!/_0 = 10^{10}$. Og lige før skulle det give 10."

E: "Det må da være noget sludder!"

L: "Netop. Divisionen af 0 med 0 ikke giver noget bestemt resultat, og så regner vi også den for umulig. Kan du nu formulere grunden til at vi ikke må dividere med 0?"

E: "OK, det er altså forbudt at dividere med 0, fordi vi aldrig kan få noget bestemt ud af det. I de fleste tilfælde får vi slet ingenting ud af det, og hvis vi dividerer 0 med 0, får vi hvad som helst."

Man kunne forestille sig analoge dialoger om, hvorfor kvadratroden af et positivt tal a altid er positivt, skønt ligningen $x^2 = a$ har både positive og negative løsninger, om hvorfor det er forbudt - i skolen - at operere med kvadratroden af et negativt tal, om hvorfor generelle potensfunktioner kun er defineret for positive værdier, når der ikke er noget problem med at uddrage kubikroden af ethvert reelt tal.

Sætte sig ind i andres mundtlige udsagn

Et eksempel på behovet for, at læreren kan *sætte sig ind i andres mundtlige udsagn* kunne være: "1 dm^3 er det samme som 1 liter. Når der skal 1000 cm^3 til 1 dm^3, hvorfor skal der så ikke 1000 cL, men kun 100 cL til 1 liter?", hvor læreren skal kunne gå i dialog med eleverne om betydningen af "deci", "centi". "milli" osv. i forhold til forskellige enhedssystemer.

Udtrykke sig på forskellig måde

En illustration af det, at læreren kan *udtrykke sig på forskellig måde*, kunne bestå i, at læreren på sene klassetrin kan referere til kommutativiteten af multiplikation, mens han/hun i 3. klasse ville omtale det samme fænomen med dagligsproglige udsagn som "det er lige meget, hvad vi tager først, når vi ganger to tal", belyst med forklarende eksempler, fx støttet af tegninger. På videregående trin kan læreren omtale det bestemte integral som en lineær funktional, mens man i gymnasiet vil indskrænke sig til at konstatere, at $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\; dx = \alpha \int_a^b f(x)\; dx + \beta \int_a^b g(x)\; dx$.

7.2.8 Hjælpemiddelkompetence

Karakteristik

Kende muligheder og begrænsninger ved og kunne betjene sig af hjælpemidler

Denne kompetence består dels i at *have kendskab til* eksistensen og egenskaberne ved diverse former for relevante redskaber til brug for matematisk virksomhed, og have indblik i deres *muligheder og begrænsninger* i forskellige slags situationer, dels i at være i stand til, på reflekteret vis, at *betjene sig af* sådanne hjælpemidler.

Didaktiske og pædagogiske kommentarer

Eftersom det er en af matematikundervisningens opgaver at fremme elevernes kompetence til at begå sig med aktuelle og relevante matematiske hjælpemidler, må læreren selvfølgelig selv besidde denne kompetence i en rimelig udstrækning.

Elevernes forskellige udgangspunkter

Derudover underviser en matematiklærer typisk elever som spænder meget vidt med hensyn til modenhed, forudsætninger, interesser, "læringsstil" osv. Derfor er det vigtigt for læreren at have kendskab til og at kunne betjene sig af et bredt repertoire af hjælpemidler, som er typiske og tilgængelige for matematisk virksomhed på de trin, hvor han/hun underviser.

Indsigt i didaktiske potentialer

Læreren kan bringe forskellige hjælpemidler, fx it, i anvendelse som middel til at igangsætte eller fremme elevernes læreprocesser. Det betyder, at lærerens eget kendskab til og beherskelse af sådanne hjælpemidler må kombineres med indsigt i, hvad de enkelte hjælpemidler kan tilføre matematikundervisningen med hensyn til indhold og arbejdsmåder på forskellige trin og i forskellige sammenhænge.

Eksemplificering

De helt små klassetrin

På de helt små klassetrin kan man nævne lærerens evne til at tage stilling til og gennemføre anvendelse af konkrete materialer som tællebrikker, centicubes eller andre klods-, brik- eller stangsystemer, kuglerammer osv. til støtte for forskellige elevers begrebsdannelse, undersøgelse af sammenhænge og mønstre, efterprøvelse af hypoteser, grundlæggelse af færdigheder osv.

Senere klassetrin

På senere klassetrin kan der være tale om at inddrage geometriske skabeloner, spirografer, linealer, passere, vinkelmålere, terninger, særligt indstreget papir, karton til foldning eller udskæring.

Vi kunne også nævne lærerens reflekterede igangsættelse af elevvirksomhed, der indebærer omgang med lommeregnere. Her er det centralt, at læreren har overblik over, hvordan en sådan omgang kan influere på elevers talbegreb og -forståelse samt kalkulatoriske formåen.

På samme vis skal læreren kunne tage stilling til anvendelsen af udvalgte computerprogrammer, fx til at skabe nye vinkler på arbejdet med faglige emner og begreber. Det kunne dreje sig om at

- fremme arbejdet med sandsynligheder ved hjælp af simulationer eller statistiske undersøgelser.
- øge mulighederne for grafisk støtte til problemløsning i tilknytning til arbejdet med funktioner.
- vurdere, om et dynamisk geometriprogram egner sig til eksplorative undersøgelser, fx af hvad der sker med arealet af en trekant, hvis man fastholder grundlinjen og "trækker" i den modstående vinkelspids, fx parallelt med grundlinjen eller vinkelret på denne, eller hvad der sker, når man lægger forskellige plane snit i en rumlig figur.
- vurdere brugbarheden af regneark til udregning af mange forskellige værdier af formeludtryk og til frembringelse af diverse typer af diagrammer, eller til

modelopbygning og –behandling (fx af typen $saldo_{n+1} = saldo_n + saldo_n \cdot r + y$ til modellering af en annuitetsopsparing).

- forholde sig til mulighederne for ved hjælp af it-systemer at visualisere matematiske objekter, fænomener og situationer både statisk og dynamisk.
- tage stilling til brugbarheden af forskellige it-bårne matematikpakker til løsning af ligninger, herunder differentialligninger, symbolsk algebra, numerisk analyse, grafisk repræsentation, samt pakker som rummer særlige modelleringsværktøjer m.v.

7.3 Overblik og dømmekraft vedrørende matematik som fagområde hos matematiklærere

For matematiklærere er det væsentligt at besidde overblik og dømmekraft vedrørende matematikken som fagområde på en sådan måde, at de ikke blot kan forholde sig til bestemte faglige og undervisningsmæssige situationer, men også til faget som helhed.

Forholde sig til faget som helhed

Læreren skal selv besidde, og til eleverne kunne formidle, et dækkende billede af matematikken, som den manifesterer sig i forhold til en elevs aktuelle og fremtidige verden, og her spiller overblik og udøvelsen af dømmekraft vedrørende faget en nøglerolle.

7.3.1 Matematikkens faktiske anvendelse i andre fag og praksisområder

Karakteristik

Genstanden for denne form for overblik og dømmekraft er den faktiske anvendelse af matematik til udenomsmatematiske formål inden for områder af dagligdags, samfundsmæssig eller videnskabelig betydning. Denne anvendelse kommer i stand og til udtryk gennem bygningen og udnyttelsen af matematiske modeller.

Hvem anvender mat. til hvad?

Didaktiske og pædagogiske kommentarer

For en lærer er det vigtigt at have overblik over, hvornår, til hvad og af hvem matematik faktisk anvendes og kan anvendes, og hvorfor det har betydning at lære matematik i et nutidigt samfund. Dette er en af forudsætningerne for, at læreren kan begrunde sin undervisning både over for sig selv, over for elever og forældre og over for kolleger.

Begrunde egen undervisning

På flere og flere undervisningstrin udbredes tværfaglig undervisning om emner og

Tværfaglig undervisning

temaer, ofte i form af projektarbejde. For at tilgodese læring af matematik, også i sådanne sammenhænge, er det vigtigt, at læreren har en stor fond af viden om, hvornår matematik kan bringes i anvendelse og med hvilket udbytte, og om hvordan forbindelsen er/kan være mellem matematik og andre fagområder. Hertil hører også at kunne bedømme, hvornår en aktivitet ikke kan give anledning til tilfredsstillende aktualisering af matematisk virksomhed.

I et større perspektiv er det vigtigt, at læreren er opmærksom på, at væsentlige dele af matematikkens anvendelse i dag er skjult i komplicerede modeller, ofte yderligere camoufleret af en kraftig it-iklædning. Denne anvendelse har ikke sjældent betydningsfulde samfundsmæssige konsekvenser, såvel af positiv som af negativ art, og det på et grundlag der lige så tit er ubegrundet som velbegrundet, om end matematikken ofte tildeles en autoritær rolle i disse sammenhænge, hvis denne rolle da overhovedet kommer frem i lyset. Indblik i disse forhold er en forudsætning for, at læreren på én gang kan forholde sig kritisk til matematikkens anvendelse og have blik for, under hvilke omstændigheder anvendelsen er berettiget, begge dele for at kunne medvirke til at bibringe eleverne en både dækkende og nuanceret opfattelse af forholdene.

Forholde sig kritisk til mat.'s anvendelse og omstændigheder for berettiget anvendelse

7.3.2 Matematikkens historiske udvikling såvel internt som i samfundsmæssig belysning

Karakteristik

Mat.'s udvikling i tid og rum

Genstanden for denne form for overblik og dømmekraft er det forhold, at matematikken har udviklet sig i tid og rum, i kultur og samfund.

Didaktiske og pædagogiske kommentarer

Mat. ikke uforanderlig

Det er vigtigt, at eleverne opnår kendskab til, at matematikken ikke er en uforanderlig størrelse, som altid har set ud på en bestemt måde, men at den har udviklet sig gennem tiderne i kraft af menneskelig aktivitet og i takt med forskellige samfunds udvikling, og at den fortsat vil udvikle sig. Det kan medvirke til at give eleverne baggrund for at opnå et nuanceret perspektiv på matematik og matematisk virksomhed. Et sådant kendskab opnås bl.a. ved, at relevante historiske aspekter af matematikken inddrages i undervisningen. Det forudsætter, at læreren selv har et overblik over hovedtræk og -punkter i matematikkens historiske udvikling.

Historiske paralleller til elevernes vanskeligheder

Derudover kan lærerens brug af velvalgte historiske pointer og illustrationer tjene det didaktiske og pædagogiske formål at belyse, at nogle af elevernes vanskeligheder med at tilegne sig matematiske begreber også har været vanskeligheder, som matematikken har måttet overvinde undervejs i sin historie.

7.3.3 Matematikkens karakter som fagområde

Karakteristik

Mat.'s karakteristika i forhold til andre fagområder

Som fagområde har matematikken sine egne karakteristika. Det er disse karakteristika, der er genstand for den foreliggende type overblik og dømmekraft. Nogle karakteristika har matematikken tilfælles med andre fagområder, andre er den ret alene om.

Didaktiske og pædagogiske kommentarer

Hvornår og hvorfor kan bestemte områder inddrages?

Det er en del af matematikundervisningens opgave at udvikle elevernes forståelse for de karakteristiske træk ved matematisk tankegang og virksomhed. Hertil hører de træk, hvorved matematik som fag adskiller sig fra andre fagområder. Det forudsætter åbenbart, at læreren selv har indsigt i matematikkens særlige karakter. For at kunne vurdere til hvilket formål, hvornår og på hvilken måde bestemte områder af matematikken kan inddrages i undervisningen, må læreren have overblik over de problemstillinger, tankegange og metoder, som karakteriserer faget.

Dette er fx væsentligt for at kunne tilrettelægge undervisningssituationer, hvor eleverne inspireres til at finde mønstre og strukturer, opstille og afprøve hypoteser, udfinde eksempler, løse problemer, forsøge at generalisere og levere begrundelser for de fundne resultater; processer som ofte kalder på kvalificering gennem lærerens hensigtsmæssige spørgsmål og forslag.

Del IV

Kompetencer og fagligt stof

8 Fagligt stof på de enkelte trin i samspil med kompetencerne

8.1 Indledning

Der er grundlæggende to slags forbindelser mellem kompetencer og fagligt stof:

En komp. udøves og udvikles i omgang med fagligt stof

- En kompetence kan *udøves* i forhold til et givet stof, dvs. komme i spil og til udtryk i omgangen med dette stof.
- En kompetence kan *udvikles*, dvs. skabes eller konsolideres, ved omgang med et givet stof.

Hvad det sidste angår, er det grundlæggende for tankegangen i KOM-projektet, at kompetencerne kun kan udvikles gennem nærkontakt og beskæftigelse med konkret matematisk stof, og altså ikke ved blot at høre eller læse om dem, eller gennem en eller anden form for almen, kontekstuafhængig eksercits.

Der er uden tvivl også tale om, at nogle slags stof er mere skikkede end andre til at fremme udviklingen af en bestemt kompetence. For eksempel er langvarig beskæftigelse med aritmetik utvivlsomt nødvendig for at udvikle modelleringskompetence i forhold til en mangfoldighed af hverdagsproblemstillinger, mens den næppe udgør det bedste grundlag for at udvikle fx den fulde ræsonnementskompetence, inklusive bevisførelse. Tilsvarende er fordybelsen i abstrakt algebra en væsentlig støtte for udviklingen af symbol- og formalismekompetence, men den er ikke et tilstrækkeligt middel til at udvikle modelleringskompetence.

Når dette er sagt, er der imidlertid mange grunde til at tro, at hver af kompetencerne i alt væsentligt kan udvikles gennem beskæftigelsen med et bredt spektrum af ganske forskelligt fagligt stof. Det skyldes, at det – overordnet set – er de samme matematiske betragtningsmåder og metoder, der går igen og er bærende i omgangen med alt matematisk stof.

Disse overvejelser indebærer, at det kun i mindre grad er hensynet til kompetencerne, der kan styre valget af det faglige stof, som skal sættes på dagsordenen på de forskellige uddannelses- og undervisningstrin. Dette valg må derfor hvile på andre hensyn. Det kunne dreje sig om det enkelte stofområdes betydning og placering i skabelsen af matematisk begrebsforståelse eller i opbygningen af matematikken

Komp. alene kan ikke styre stofvalg

som disciplin. Det kunne også dreje sig om stofområdets relevans i forhold til brugen af matematik til udenomsmatematiske formål for den målgruppe, der sigtes mod.

Fokus på udøvelsen af komp. i udvalgte stofområder

På den baggrund må det ses som vores opgave på den ene side at foretage en udpegning af et mindre antal større og overordnede matematiske stofområder, som skal indgå i matematikundervisningen på de forskellige trin, og på den anden side at fremkomme med nogle overvejelser over, hvordan de enkelte kompetencer kan *udøves* i forhold til disse stofområder. Ønsket om, at antallet af stofområder skal være relativt lille, skyldes behovet for at undgå en uhensigtsmæssig overdetaljering, som let kan føre til, at opmærksomheden rettes mod tilstedeværelsen eller fraværet af enkeltpunkter i en pensumliste.

At vi her fokuserer på, hvordan kompetencerne udøves i forhold til stofområderne, betyder ikke, at udviklingen af kompetencerne gennem omgang med fagligt stof skal tillægges sekundær betydning. Tværtimod er dette anliggende af den største betydning for tilrettelæggelsen og gennemførelsen af den konkrete undervisning, men det er et tema, som vi ikke vil behandle i den foreliggende sammenhæng.

8.2 En matrix-struktur

Stof $\times$ komp. danner en matrix

Det vil være nærliggende for hvert undervisningstrin at tænke i en matrixstruktur, hvor de matematiske stofområder udgør fx rækkerne og de otte kompetencer søjlerne. Matricen skal så betragtes som en opgørelse over, hvordan den enkelte kompetence udøves i forhold til det enkelte stofområde. Det betyder, at genstanden for betragtningerne er det enkelte stofområde, svarende til rækkerne, mens fokus er på manifestationen af kompetencerne heri, svarende til søjlerne.

Kompetence/ Stofområde	Tanke-gangs-komp.	Problem-håndt.-komp.	Model-lerings-komp.	...	Hjælpe-middel-komp.
stofområde 1					
stofområde 2					
...					
stofområde n					

Hver celle: Samspil mellem stofområde og komp.

Man kan tænke sig forskellige modeller for udfyldelsen og udnyttelsen af en sådan matrixstruktur. Vi har valgt en model, hvor der for den enkelte celle tages konkret stilling til *det nærmere samspil* mellem det optrædende stofområde og den optrædende kompetence. Arten af dette samspil kan altså variere fra celle til celle. For nogle celler kan det måske bestå i, at den pågældende kompetence (næsten) ikke spiller nogen rolle for beskæftigelsen med det pågældende stofområde. For andre kan der være tale om, at samspillet mellem kompetence og stofområde har en karakter, som adskiller sig fra forholdene i nabocellerne.

Med denne model skal der altså for hvert uddannelses- og undervisningstrin tages stilling til indholdet af hver celle i matricen for sig. I praksis bliver det nødvendigt at nøjes med at illustrere fremgangsmåden gennem beskrivelsen af et repræsentativt udpluk af celler på forskellige undervisningstrin. Til belysning heraf kommer senere i denne tekst en skitse til en mulig beskrivelse af den måde, hvorpå kompetencerne kommer til udtryk i udvalgte stofområder på udvalgte trin.

Belysning af repræsentativt udpluk af celler

8.3 Valget af stofområder

Den første opgave er her at tage stilling til detaljeringsgraden af de stofområder, vi udpeger. I arbejdsgruppen har der været enighed om at betjene os af et antal hovedstofområder, som for at undgå pensumfiksering *ikke* skal underopdeles i delområder, men beskrives i en kort tekst, hvis opgave alene er at gøre det muligt at forstå, hvad der tænkes at ligge i hovedoverskrifterne. Disse tekster tjener altså ikke til at normere et pensum.

Undgå overdreven stofdetaljering

Vi har koncentreret os om ti stofområder, som er på dagsordenen i skolesystemet eller i indledende videregående undervisning. Stofområder med en mere specialiseret stilling, fx på universitetsniveau, er ikke taget i betragtning her. Det skal understreges, at vi har valgt kun at pege på *egentligt matematiske stofområder*. Det betyder, at specifikke anvendelsesområder såsom mønt, mål og vægt, standardmodeller og lignende ikke er nævnt for sig, deres vigtighed ufortalt. De tænkes aktiveret i sammenhæng med de relevante matematiske stofområder og kompetencer. Lad det endelig være sagt, at ikke alle stofområder nødvendigvis optræder på alle undervisningstrin, og at selv om beskrivelsen af det enkelte stofområde tænkes at være den samme for alle de trin, den berører, betyder det ikke, at alle de træk, som optræder i beskrivelsen, nødvendigvis tænkes sat på dagsordenen på ethvert trin. Hvilke stofområder og træk, der skal tages op på det enkelte trin, er et spørgsmål, som kræver specifik stillingtagen for det pågældende trin.

Valg af ti mat. stofområder

8.3.1 En blanding af "klassiske hjørnesten" og nyere stofområder

Valget af stofområder hviler dels på en betragtning af de klassiske hjørnesten i matematikken som disciplin og undervisningsfag, dels på en udpegning af, hvilke moderne stofområder der har særlig betydning for anvendelsen af matematik inden for et bredt spektrum af andre fag- eller praksisområder.

De klassiske hjørnestene omfatter tal, algebra, geometri og funktioner, hvoraf de tre første har udgjort matematikkens kerne i et par årtusinder. De fire indgår alle i nedenstående liste over stofområder (og i lister over stofområder overalt i verden) med den modifikation, at området "tal" på grund af dets vigtighed er opdelt i to; ét som fokuserer på selve talbegrebet og talområderne, og ét som fokuserer på omgangen med og brugen af tallene til anvendelsesformål, dvs. aritmetik. Desuden er

Klassiske hjørnestene

der foretaget en adskillelse mellem selve funktionsbegrebet og de basale specielle funktioner på den ene side, og det analytiske studium af funktioner (infinitesimalregningen) på den anden side.

Nyere stofområder bl.a. af betydning for anvendelser

Med hensyn til *nyere stofområder* har hovedsigtet som sagt været at vælge sådanne, der har en bred betydning, både anvendelsesmæssigt og i forhold til de undervisningstrin, som betragtes. Her er valget faldet på sandsynlighedsregning, statistik, diskret matematik og optimering, der har væsentlige roller at spille inden for en mangfoldighed af videnskabelige, faglige og praktiske domæner.

Talområderne: Hermed tænkes på talbegrebet og de klassiske hovedtalområder: De naturlige tal, de hele tal, de rationale tal, de reelle tal, og de komplekse tal. Der tænkes tillige på notation af tal, herunder positionssystemet, brøker, decimaltal m.v.

Aritmetik: Hermed tænkes på regningsarterne addition, subtraktion, multiplikation og division i spil over for konkrete tal og på diverse algoritmer til udførelse af regningerne. Til dette stofområde henregnes også procentregning samt overslags- og tilnærmelsesregning.

Algebra: Hermed tænkes på formelle træk ved kompositioner, der bringes i spil over for forskellige sæt af objekter, såsom kompositioner og deres samspil, herunder generelle regneregler, ligninger og ligningsløsning, algebraiske strukturer (grupper, ringe, legemer, vektorrum m.m.), algebraiske undersøgelser af geometriske objekter.

Geometri: Hermed tænkes på hele spektret af geometriske problemstillinger, betragtningsmåder og discipliner, såsom beskrivende geometri vedrørende plane og rumlige objekter, geometrisk måling, koordinatsystemer og analytisk geometri, deduktiv geometri (på et globalt eller et lokalt aksiomatisk grundlag), kurver og flader, differentialgeometri, geometriske undersøgelser af algebraiske objekter.

Funktioner: Hermed tænkes på såvel selve funktionsbegrebet, inklusive variabelbegrebet, og funktionsgrafer, såvel som på de basale specielle reelle funktioner: lineære og andre polynomiumsfunktioner, rationale funktioner, trigonometriske funktioner, potensfunktioner, eksponential- og logaritmefunktioner.

Infinitesimalregning: Hermed tænkes på klassisk reel analyse omhandlende emner som kontinuitet og grænseværdi for funktioner, differentiabilitet og differentiation, ekstrema, integrabilitet og integration, differentialligninger, og på konvergens og divergens af talfølger og rækker samt numerisk analyse.

Sandsynlighedsregning: Hermed tænkes på selve tilfældigheds- og sandsynlighedsbegrebet, kombinatoriske sandsynligheder og endelige sandsynlighedsfelter, stokastiske variable og fordelinger, herunder sædvanlige standardfordelinger, samt aksiomatisk sandsynlighedsteori.

Statistik: Hermed tænkes på organisering, fortolkning og slutningsdragning vedrørende kvantitative data, såsom usikkerhed, beskrivende statistik, empiriske fordelinger, parameterestimation, hypotesetestning, forsøgsplanlægning og inferens.

Diskret matematik: Hermed tænkes på undersøgelse af endelige samlinger af objekter (eller uendelige som ikke udgør et kontinuum): Tællemetoder og kombinatorik, klassisk (elementær) talteori, grafer og netværk, koder og algoritmer.

Optimering: Hermed tænkes på bestemmelse af lokale eller globale ekstremumsværdier for reelle funktioner med eller uden infinitesimalregning, såsom maksima og minima for reelle funktioner af en eller flere variable, optimering under bibetingelser, herunder lineær programmering.

8.4 Stofområder og uddannelses- og undervisningstrin

I det følgende skema har vi taget stilling til, på hvilke uddannelses- og undervisningstrin de enkelte stofområder *senest* bør behandles eksplicit og i forhold til trinnet systematisk, på den ene eller den anden måde.

Stofområder og uv.trin: Hvad og hvornår?

Udd.trin/ Stofområde	1.–3. kl.trin	4.–6. kl.trin	7.–9. kl.trin	Gymn. C-niv.	Gymn. B-niv.	Gymn. A-niv.	Gr.sk.-lærer	Uni.-udd.
Talomr.	•	•	•	•	•	•	•	•
Aritmetik	•	•	•	•	•	•	•	•
Algebra			•	•	•	•	•	•
Geometri	•	•	•	•	•	•	•	•
Funktioner		•	•	•	•	•	•	•
Infinitesim.					•	•		•
Sandsynligh.		•	•	•	•	•	•	•
Statistik		•	•	•	•	•	•	•
Diskret mat.		•	•	•	•	•	•	•
Optimering					•	•		•

Det skal understreges, at dette ikke er et forslag om, at stofområdet *først* bør indgå på dette trin. Megen god undervisning bygger i god tid implicit op til, at der på et senere stadium skal foretages en eksplicit behandling af et stofområde.

For eksempel vil det være nærliggende på 1.–3. klassetrin at arbejde med intuitive overvejelser om chance og risiko i forbindelse med spil, uden at sandsynlighedsbegrebet som sådan sættes på dagsordenen, eller med spørgsmål som hvad der sker med en bestemt størrelse i fald en anden størrelse ændres, uden at funktionsbegrebet tages op til udtrykkelig behandling. På samme måde vil der være god mening i på 7.–9. klassetrin og i det gymnasiale C-niveau at behandle visse *problemstillinger* vedrørende optimering, uden at *stofområdet* optimering er på dagsordenen.

Man kan udtrykke det sådan, at fraværet af en markering i en celle i nedenstående matrix ikke nødvendigvis betyder, at der ikke med rette kan undervises i stofområdet på det pågældende trin.

Det skal sluttelig endnu engang understreges, at der med tilstedeværelsen af et stofområde på et givet trin intet er sagt om det omfang og den måde, stofområdet skal være repræsenteret på.

8.5 Eksempler på samspillet mellem kompetencer og stofområder

To illustrerende eksempler

Når det gælder selve beskrivelsen og formuleringen af samspillet mellem stofområder og kompetencer, kunne man forestille sig noget i stil med følgende.

8.5.1 Eksempel: Geometri på 1.–3. klassetrin

Forventninger til omgangen med stoffet

Geometri på 1.–3. klassetrin

Ved udgangen af 3. klasse forventes eleverne at *kende navne* for de elementære geometriske objekter og grundformer (som fx punkt, linje(stykke), cirkel, ring, trekant, firkant, kugle, terning, kasse m.m.) og at kunne anvende disse til *idealiseret beskrivelse* af fysiske genstande (fx tegning af en bil og en bus som cirkler med forskellige størrelser firkanter oven på, et hus som en firkant med en trekant oven på, etc.). De forventes tillige at have begreb om (tilnærmet) *måling* af længder, arealer og rumfang ved hjælp af forelagte enheder. De forudsættes at have erhvervet erfaring med *repræsentation* af elementære geometriske grundformer, situationer og fænomener ved hjælp af *konkrete materialer* som fx tegninger, puslespil, stænger, hængsler, snore, geoboards, skærmbilleder, ikoner o.lign. De kan i omgangen med konkrete geometriske genstande forholde sig til og *stille spørgsmål* af typen “Hvad hedder sådan en ting. . . ?”, “Hvor mange hjørner har en 3-kant, en 4-kant, en terning?” eller “Findes der en 1-kant (eller en 2-kant), og hvor mange hjørner har den i givet fald?” På basis af inspektion af enkelttilfælde kan de også *svare på sådanne spørgsmål*. I den forbindelse kan de støtte deres svar på enkle *ræsonnementer*, der hviler på konkrete erfaringer. De forventes tillige at kunne *kommunikere* i dagligt talesprog og i tegnede billeder med kammerater og nære voksne om deres erfaringer og oplevelser med geometriske genstande og fænomener.

Hvordan udøves kompetencerne?

Hvilke komp. aktiveres?

Det fremgår heraf, at de grundlæggende træk af *tankegangskompetence* kommer til udtryk i sammenhæng med formuleringen af spørgsmål om geometriske genstandes navne og egenskaber. *Modelleringskompetence* kommer til udtryk i anskuelsen af geometriske objekter som idealiseringer af fysiske genstande, mens *problemløsnings-* og *ræsonnementskompetencerne* optræder i sammenhæng med undersøgelsen af grundlæggende geometriske fænomener og retfærdiggørelsen af de opnåede svar. *Repræsentations-* og *hjælpemiddelkompetencerne* kommer direkte i spil i forhold til selve den måde, eleverne møder geometriske genstande på, mens *kommunikationskompetence* direkte udøves i elevernes virksomhed i samarbejde med andre elever og i samtaler med voksne. Derimod synes *symbol- og formalismekompetence* ikke at have en selvstændig rolle i beskæftigelsen med geometri på dette trin.

8.5.2 Eksempel: Funktioner på 7.–9. klassetrin

Forventninger til omgangen med stoffet

Funktioner på 7.–9. klassetrin

Ved udgangen af 9. klasse forventes eleverne at kunne forstå, aktivere og *udnytte funktionsbegrebet* i almen form i internt matematiske sammenhænge og i forbindelse med diverse anvendelser af matematik, herunder modellering. I den forbindelse er de i stand til at *vælge eller identificere de afhængige og de uafhængige variable* i de betragtede forbindelser. Eleverne forventes tillige at kunne forstå, fortolke, udnytte og konstruere forskellige *repræsentationer* af funktioner, herunder regneforskrifter, tabeller, regneark m.v., og ikke mindst *funktionsgrafer*. Specielt forventes de aktivt at kunne omgås *lineære funktioner*, både algebraisk og grafisk, og at have kendskab til disse funktioners egenskaber og egenskabernes sammenhæng med de karakteristiske parametre for lineære funktioner. De kan i den forbindelse rejse, og ofte besvare, spørgsmål om tilstedeværelsen eller fraværet af *proportionalitet* og *linearitet* samt forholde sig til brugen heraf i matematisk modeller. Det indebærer bl.a., at eleverne i teori og praksis kan skelne mellem lineære og andre funktioner.

Hvordan udøves kompetencerne?

Hvilke komp. aktiveres?

For at kunne omgås funktionsbegrebet i almindelighed og lineære funktioner i særdeleshed må eleverne kunne aktivere *tankegangskompetence*. For at kunne formulere og løse "rene" eller "anvendte" problemer, hvori funktionsbegrebet indgår, må de besidde *problemløsnings-* og *modelleringskompetence*. For at kunne retfærdiggøre fortolkninger vedrørende påstande med et funktionsindhold, og for at kunne godtgøre rigtigheden af løsninger på problemer med et sådant indhold, må eleverne besidde et vist mål af *ræsonnementskompetence*. At *repræsentationskompetencen* står centralt i omgangen med næsten alle aspekter af funktionsbegrebet, også på dette trin, er åbenbart. *Symbol- og formalismekompetence* optræder navnlig i sammenhæng med manipulation af algebraiske (først og fremmest lineære) funktionsudtryk, til brug for fx ligningsløsning eller dragning af konklusioner af analytisk-geometrisk art. Hver gang elever på skrift, i tale eller med figurer skal vise, beskrive, forklare eller diskutere brugen, tilstedeværelsen eller egenskaberne ved en eller flere funktioner, aktiveres tydeligvis *kommunikationskompetence*. *Hjælpemiddelskompetence* spiller især en rolle, når eleverne benytter lommeregnere eller computere til visuel eller skemamæssig repræsentation af funktionsgrafer, variation af parametre, aflæsning af funktionsværdier, skæringspunkter m.v.

8.6 Overblik og dømmekraft i forhold til stofområder

For forbindelsen mellem kompetencer og stofområder gælder det som nævnt, at kompetencerne såvel kan udvikles som udøves i forhold til omgangen med stofområderne. På tilsvarende vis forholder det sig med forbindelsen mellem på den ene side overblik og dømmekraft og på den anden side stofområderne.

Udvikling og udøvelse af overblik og dømmekraft i forhold til mat. stofområder

Der er givetvis tale om, at overblik og dømmekraft *udvikles* (bl.a.) ved omgang med stofområderne, hvilket er et væsentligt spørgsmål for den konkrete undervisning. Omvendt vil *udøvelsen* af overblik og dømmekraft vedrørende henholdsvis matematikkens faktiske anvendelse, historiske udvikling og særlige karakter som fagområde bidrage til at motivere og farve beskæftigelsen med stofområderne og til at udbygge forståelsen af disses indretning og natur.

Måden, det sker på, afhænger både af trin og stofområde. Allerede udviklet overblik og dømmekraft vedrørende *matematikkens anvendelse* vil spille en rolle for beskæftigelsen med stofområder som aritmetik, funktioner, sandsynlighedsregning, statistik, diskret matematik og optimering. Overblik og dømmekraft vedrørende *matematikkens historiske udvikling* vil give fylde og støtte til beskæftigelsen med samtlige stofområder, ikke mindst talområderne, aritmetik, algebra, geometri, sandsynlighedsregning og infinitesimalregning. Sådan forholder det sig også med overblik og dømmekraft angående *matematikkens særlige karakter*, som bidrager til indsigt og forståelse for det centrale i stofområder som algebra, (deduktiv) geometri, infinitesimalregning og sandsynlighedsregning.

8.7 Pejlinger for naturlige fortsættelser af arbejdet

Invitation til videre udviklingsarbejde

Den struktur for samspillet mellem kompetencer og fagligt stof, som vi har lagt frem i dette kapitel, må ses som en invitation til et større analytisk udviklingsarbejde. I arbejdsgruppen har vi undervejs i arbejdet haft idéer til en række elementer, som bør indgå i en sådan fortsættelse af analysen, men som vi, inden for rammerne af dette projekt, kun har haft kræfter til at skitsere karakteren af.

“Udfyldelse” af cellerne i matricen

Den form for fortsat analyse, der mest umiddelbart byder sig til, handler om for hvert uddannelsestrin at *“udfylde” alle de relevante celler i kompetence-stområde-matricen*. For hver celle handler det om at forsøge at svare på spørgsmål som

- Hvilken rolle bør denne kombination af kompetence og stofområde spille på dette uddannelsestrin?
- Hvis svaret er "ingen", da hvorfor? (Det giver med andre ord god mening også at kommentere de celler, som ved en første "udfyldning" af matricen efterlades tomme.)
- Hvis kombinationen har en rolle at spille, hvori består så det frugtbare ved netop denne kombination?

De to eksempler på udfyldelse af en celle, som vi har givet ovenfor, er tænkt som inspiration til et sådant arbejde.

Afvejning af indholdselementerne

En naturlig forlængelse heraf består i at *afveje* de forskellige indholdselementer i forhold til hinanden:

- Hvilke elementer bør veje tungt, og hvilke må nøjes med en mere beskeden rolle, givet at der er en endelig mængde tid og mentale kræfter til rådighed? (Man kan forestille sig "store" og "små" prikker i matricen – "enten eller" viser sig hurtigt at være en alt for firkantet tilgang.)
- Er der bestemte kompetencer, som på tværs af stofområderne bør have en særlig fremskudt placering på dette uddannelsestrin? Dette spørgsmål er dog til dels belyst i den VII af denne rapport.
- Gælder noget tilsvarende for bestemte stofområder?

Analyser af matricen søjle- og rækkevis

De to sidste spørgsmål lægger op til at forlade "celleniveauet" og analysere matricens enkelte *søjler og rækker*:

- Hvilke sammenhænge kan man forvente mellem måden, hvorpå en given kompetence kan/bør udvikles eller udøves i omgangen med de forskellige stofområder?
- Hvilke sammenhænge kan man forvente mellem måden, et givet stofområde bidrager til udviklingen af de forskellige kompetencer på?

I forhold til sidstnævnte spørgsmål kan man indledningsvis se på beskæftigelsen med et enkelt begreb: Hvordan kan arbejdet med (fx) begrebet "cirkel" tilrettelægges/vinkles/udfordres, hvis man har et ønske om at bidrage til udviklingen af elevens ræsonnementskompetence? modelleringskompetence? hjælpemiddelkompetence? etc.

Uddannelsestrin som en tredje dimension

Alle de foregående typer overvejelser har kun forholdt sig til én given matrix og dermed ét givet uddannelsestrin. Den struktur, vi her har skitseret, er imidlertid tredimensional. Med matricen som udgangspunkt kommer uddannelsestrinnet således til at udgøre en tredje "dybdedimension", som kan være nærliggende at glemme. Analyser i denne dimension handler om *langsgående stofområder og deres kompetenceforbindelser*:

- Hvordan bør sammenhængen og udviklingen være *på langs* ad uddannelsessystemet mht. arbejdet med kompetence X i forhold til stofområde Y?

I forhold til KOM-projektets implementering er det måske det vigtigste spørgsmål af alle de her nævnte.

Del V

Progression i og evaluering af kompetenceudvikling

9 Evaluering af kompetencer

9.1 Kompetencer kommer til udfoldelse i aktiviteter

At besidde en af de otte matematiske kompetencer (i et eller andet omfang) består, som flere gange fremhævet i denne rapport, i at være beredt og i stand til at udføre visse matematiske handlinger på basis af indsigt. Kernen i en kompetence er med andre ord indsigtsbaseret handleberedthed, hvor "handlinger" kan være både fysiske, adfærdsmæssige – herunder sproglige – og mentale. En gyldig og dækkende evaluering af en persons matematiske kompetencer må derfor, i udgangspunktet, baseres på identificering af disses tilstedeværelse og rækkevidde i forhold til matematiske aktiviteter, som den pågældende er eller har været involveret i.

En komp. er indsigtsbaseret handleparathed og udfoldes i mat. aktiviteter

En matematisk aktivitet er udførelse af et sæt af bevidste og formålsbestemte matematiske handlinger i en situation. At handlingerne er formålsbestemte, betyder ikke, at de er givne på forhånd. En matematisk aktivitet kan fx være at løse et rent eller anvendt matematisk problem, at forstå eller bygge en konkret matematisk model, at læse en matematisk tekst med henblik på forståelse eller behandling, at bevise en matematisk sætning, at undersøge sammenhængen i en teoribygning, at skrive en matematikholdig tekst til andre, eller at holde et foredrag m.m.m.

Om mat. aktiviteter

Udførelsen af en hvilken som helst matematisk aktivitet kræver udøvelse af en eller flere matematiske kompetencer. Lad os et øjeblik forudsætte, at det for en given aktivitet på den ene side er muligt at identificere (henholdsvis nødvendige og tilstrækkelige) kompetencer på forhånd, og på den anden side at observere i hvilken forstand og i hvilket omfang en person beskæftiget med aktiviteten bringer forskellige kompetencer i spil under den. Derved skabes en mulighed for at detektere og bedømme den pågældendes kompetencer i forhold til beskæftigelsen med netop denne aktivitet.

En forhåndsundersøgelse af kompetencerne i en given aktivitet er først og fremmest et teoretisk og analytisk foretagende, om end der også kan indgå empiriske momenter. Af afgørende betydning er det her at kunne præcisere og karakterisere aktiviteten og dens bestanddele samt dens fordringer på en nogenlunde velafgrænset og klar måde. En undersøgelse af hvilke kompetencer en person konkret bringer i spil i en given aktivitet er frem for alt et empirisk forehavende. Det kan kun realiseres, hvis kompetenceindholdet i personens handlinger under aktiviteten, og resultaterne af dem, lader sig detektere på en gyldig, pålidelig og klar måde.

Undersøgelse af komp.indholdet i aktiviteter

Forskellige aktiviteter involverer forskellige komp.

Nu er det forventeligt, at en given aktivitet kun lægger op til brugen af et udvalg af kompetencerne. Dermed vil også forskellige aktiviteter lægge op til indblanding af forskellige sæt af kompetencer. Det er derfor rimeligt at antage, at der skal et spektrum af forskelligartede matematiske aktiviteter til, for at man kan opnå en dækkende og righoldig repræsentation af det samlede sæt af matematiske kompetencer. Tilsvarende må det forventes, at man, for at få et dækkende og righoldigt billede af en persons matematiske kompetencer, må undersøge personens virksomhed inden for en bredere palet af matematiske aktiviteter.

9.2 Opgaven

Hidtil har vi taget udgangspunkt i matematiske aktiviteter og efterspurgt deres kompetenceindhold både teoretisk og empirisk. Men egentlig er opgaven jo den omvendte: Dels at finde veje til at evaluere den enkelte persons besiddelse af en given matematisk kompetence, dels at danne sig et samlet billede af den pågældendes matematiske kompetenceprofil. Eftersom kompetencerne kommer til udtryk i matematiske aktiviteter, kan opgaven præciseres til følgende:

- At finde – eller konstruere – *typer* af matematiske aktiviteter, der egner sig til på gyldig, pålidelig og klar måde at demonstrere tilstedeværelsen af en given matematisk kompetence hos en person involveret i aktiviteten. Dette forudsætter, at der forefindes eller skabes instrumenter, der gør det muligt at detektere, karakterisere og bedømme omfanget og dybden af kompetencebesiddelsen, sådan som den kommer til udtryk i den enkelte aktivitet.

At fremskaffe aktiviteter, der demonstrerer en komp. eller en komp.profil

- At finde – eller konstruere - *sæt* af matematiske aktiviteter, der tilsammen egner sig til på gyldig, pålidelig og klar måde at tegne en persons samlede matematiske kompetenceprofil, dvs. personens besiddelse af det samlede kompetencespektrum.
- På baggrund heraf at finde veje til at identificere, karakterisere og bedømme progression i en persons besiddelse af en eller flere matematiske kompetencer.

Vi har i afsnit 4.4.4 (side 64) indført tre dimensioner i en persons besiddelse af en kompetence, *dækningsgrad*, *aktionsradius* og *teknisk niveau*. Ved hjælp af dem kan opgaven yderligere præciseres til at angå detektering, karakterisering og bedømmelse af henholdvis dækningsgraden, aktionsradius og det tekniske niveau, hvormed en person kan aktivere en given matematisk kompetence i diverse slags matematiske aktiviteter. Hvor de to første dele af denne opgave består i at tegne et tilstandsbillede af en persons kompetencebesiddelse, altså et statisk billede, går den tredje opgave ud på at beskrive udviklingen over tid i denne kompetencebesiddelse, altså et dynamisk billede. Derved bliver de tre dimensioner også nøglen i beskrivelsen af progression i en persons kompetencebesiddelse.

Statisk og dynamisk beskrivelse af dimensionerne i komp.besiddelse

Det er afgørende at holde fast i, at vi med denne opgave ikke kun tænker på afsluttende – summativ – evaluering i form af forskellige test, årsprøver, eksamener og lignende, men i mindst lige så høj grad på løbende evaluering undervejs i undervisningen med det formål at skaffe informationer om og til den enkelte elev – formativ evaluering – eller til læreren om status og udvikling i undervisningen.[1]

Fokus på både formativ og summativ eval.

9.3 Progression

En af de vigtige arbejdsopgaver for KOM-projektet har været at undersøge mulighederne for at identificere, karakterisere og bedømme progression i en elevs udvikling af matematiske kompetencer, mens han eller hun bevæger sig op igennem uddannelsessystemet. Med inddragelsen af dimensionerne *dækningsgrad*, *aktionsradius* og *teknisk niveau* til karakterisering af elevens aktuelle besiddelse af en bestemt kompetence opnås samtidig et middel til dynamisk beskrivelse af, hvordan den pågældende kompetence udvikles over tid hos den pågældende elev. Og da det er den samme kompetence, som er på spil hele vejen igennem uddannelsessystemet, er progressionsbeskrivelsen ikke begrænset af, hvad der foregår på det enkelte uddannelsestrin. Hos en elev udvikles en matematisk kompetence ved, at den udbygges med tilvækst af "nyt land", dvs. ved at dens dækningsggrad, aktionsradius eller tekniske niveau udbygges over tid. Vi går her ud fra, at så længe man er uddannelsesmæssigt beskæftiget med matematik, kan der i almindelighed kun blive tale om stagnation eller vækst i en dimension, ikke om en skrumpning. At denne forudsætning næppe er holdbar, hvis der er lange afbrydelser i beskæftigelsen med matematik, må i denne sammenhæng ses som mindre betydningsfuld.

En komp.s dækningsgrad, aktionsradius og tekniske niveau udbygges over tid

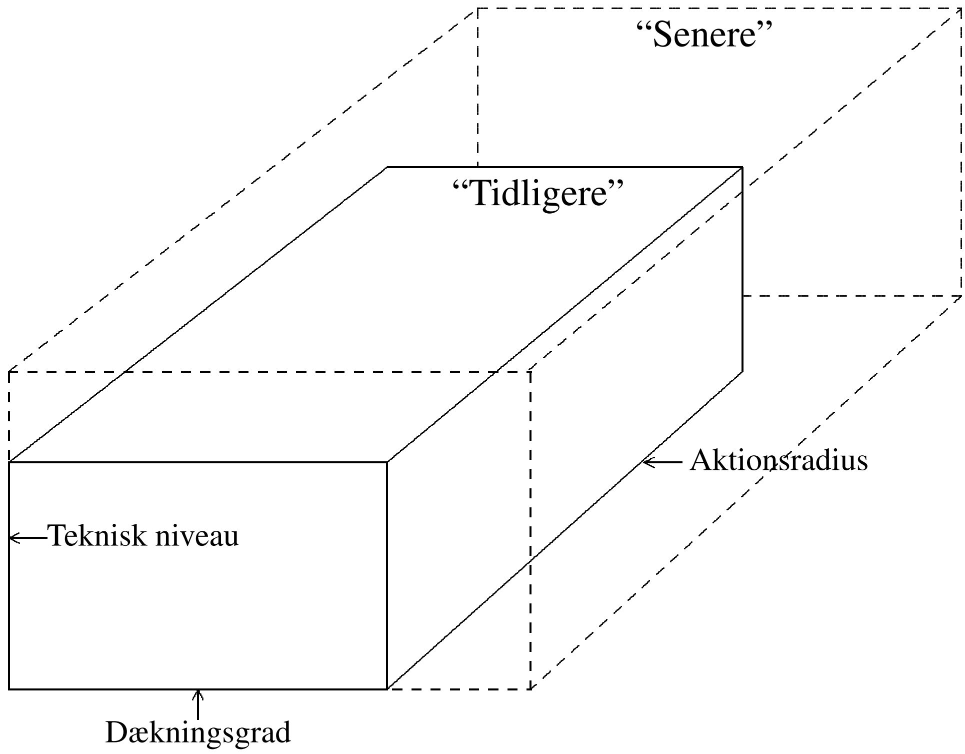
Figur 9.1 er et forsøg på at illustrere kompetencetilvæksten. Figuren egner sig tillige til at illustrere, at en kompetencen kan udbygges på adskillige måder, alt efter hvilke dimensioner som er berørt af udvidelsen. For eksempel kan man forestille sig, at dækningsgraden og aktionsradius udvides, mens det tekniske niveau er uændret. Eller at dækningsgraden og aktionsradius er uforandret, mens det tekniske niveau udvides osv. I princippet kan man tænke sig, at udviklingen af en bestemt matematisk kompetence hos en elev igennem hele hans eller hendes uddannelsesforløb følges og registreres.

Når vi er i stand til at karakterisere progression i udviklingen af en kompetence, får vi også et redskab til at fremme selve udviklingen, idet det bliver muligt for læreren at rette opmærksomheden på punkter hos den enkelte elev, hvor der er rum for yderligere landvindinger. Derved opnås forudsætninger for at programsætte foranstaltninger og aktiviteter, hvorigennem en sådan landvinding kan finde sted.

Karakterisering af progression fremmer udvikling af komp.

Hvis det med hensyn til en elev er lykkedes at beskrive progression i besiddelsen af hver af de matematiske kompetencer, på den her antydede måde, opnås automatisk en beskrivelse af progression i hele sættet af kompetencer, altså i den pågældende

[1] I Niss (1993a) kan læses nærmere om formål med og komponenterne i evaluering.



Figur 9.1 Visuel fremstilling af progression i en persons besiddelse af en matematisk kompetence.

elevs matematiske kompetenceprofil. Også her fås samtidig et redskab til at fremme selve udviklingen af kompetenceprofilen som helhed.

9.4 Evalueringsformer og -instrumenter

Behov for forsknings- og udviklingsarbejde

Det må understreges, at løsningen af den nævnte opgave fordrer en hel del forsknings- og udviklingsarbejde, ikke mindst når det gælder opgavens anden og tredje del. En række af de allerede eksisterende, mere eller mindre gængse, evalueringsformer og -instrumenter kan være velegnede til at detektere og bedømme visse af kompetencerne.

Brug af velkendte eval.former

Løsning af *skriftlige opgaver* kan navnlig benyttes til evaluering af dele af problemløsnings-, ræsonnements-, repræsentations-, symbol- og formalisme-, kommunikations- og hjælpemiddelkompetencerne. Det samme gælder, alt efter den nærmere ramme, *mundtlige prøver*, som tillige kan benyttes til evaluering af tankegangskompetencen samt til evaluering af de tre typer af overblik og dømmekraft. *Essays* kan være velegnede midler til at evaluere tankegangs- og kommunikationskompetencerne, samt overblik og dømmekraft. *Projekter* kan – alt efter art og form

– tjene til at evaluere hele spektret af matematiske kompetencer, inklusive overblik og dømmekraft. Projekter er ikke mindst specielt velegnede ved evaluering af modelleringskompetence. Det samme gælder for grundige *observationer af elever i arbejde*, og for *logbøger* (dvs. en slags notes- og dagbog, hvori eleven løbende noterer sine aktiviteter samt betragtninger over, hvad han/hun har lært af dem), og *porteføljer* (dvs. en mappe indeholdende elevens skriftlige produkter). *Aktiv formidling til andre* i form af artikler, foredrag, posters og medieprodukter kan egne sig til at evaluere tankegangs-, repræsentations-, kommunikations- og hjælpemiddelkompetencerne.

Nogle af de beskrevne hverv er udtænkt til først og fremmest at være evalueringsinstrumenter (det gælder fx mundtlige prøver og porteføljer), andre tjener den blandede opgave på én gang at være et evalueringsinstrument og et læringsmiddel (fx skriftlige opgaver og essays), mens atter andre først og fremmest er et undervisningsmæssigt aktivitets- og læringsmiddel, som desuden kan benyttes til evalueringsformål (fx projekter og aktiv formidling til andre). Endelig tjener nogle både som evalueringsinstrument og som støtte for elevens refleksion over egen læring, ofte benævnt metakognition; det gælder logbøger.

Dette skal ikke foregive at være en udtømmende oversigt over kompetencerelevante evalueringsformer, for slet ikke at tale om evalueringsformer i det hele taget. Sigtet er blot at påpege, at velkendte evalueringsformer kan egne sig som instrument til evaluering af en eller flere af kompetencerne. Der er imidlertid ikke tale om, at en hvilken som helst instans af hver af disse evalueringsformer og -instrumenter er lige skikket til at evaluere de anførte kompetencer, enkeltvis eller tilsammen. Der skal et betragteligt udviklings- og designarbejde til for at gøre dem velegnede til formålet. Dette arbejde må bestå i at inddrage forskellige slags relevante matematiske aktiviteter inden for forskellige felter i de omtalte evalueringsformer. Ikke desto mindre er der gode grunde til, som en begyndelse, at tage udgangspunkt i de nævnte former, med henblik at se hvor langt man med dem kan komme med evaluering af kompetencerne, så man bedre kan målrette investeringen af kræfter i udtænkningen af nye evalueringsformer til dette formål.

Kendte eval.former skal videreudvikles

9.4.1 Prøver og eksamener – gamle og nye former

Klassiske former og variationer heraf

De evalueringsformer og -instrumenter, som oftest er i brug i dansk matematikundervisning, udgør en ret smal vifte. Når det gælder prøver og eksamener, er det individuelle skriftlige og mundtlige prøver, som dominerer billedet. De skriftlige prøver omfatter sædvanligvis færdigformulerede rene, eller postuleret/stiliseret anvendte, matematikopgaver, som under overvågning skal løses inden for en afgrænset tidsperiode, fra få minutter til 4-5 timer, typisk på selve uddannelsesstedet. De mundtlige prøver, som i hovedsagen anvendes ved årsprøver og eksamener, finder

Prøver og eksamener domineres af individuelle skriftlige og mundtlige prøveformer gerne sted ved at eleven ved lodtrækning tildeles et eller flere spørgsmål, som ønskes præsenteret og behandlet ved den mundtlige seance, hvorefter lærer og eventuelt censor har mulighed for at stille uddybende spørgsmål. Det er ret almindeligt, at der ved sådanne prøver gives eleven en vis forberedelsestid for at eliminere rene hukommelsesproblemer i præstationen.

Opblødning af de klassiske former

I de senere år, er disse "rene" former mange steder blevet opblødt på forskellig vis. Der kan fx være tale om, at en skriftlig eksamen tager form af en "tag-hjem-eksamen", hvor eleven får nogle dage til rådighed til at besvare de stillede opgaver, og hvor en tro-og-love erklæring tænkes at sikre, at eleven har besvaret opgaverne uden assistance fra andre. Hensigten med denne modifikation af skriftlige eksamener er i hovedsagen at reducere den forvridende indflydelse af en for snæver tidsfaktor på besvarelsens kvalitet. Der kan også være tale om, at en mundtlig prøve inddrager et større eller mindre element af præsentation af hjemmeforberedt stof, fx af større opgaver eller projekter, som eleven har arbejdet med i løbet af undervisningen, eller om, at prøven ikke længere er individuel, men omfatter en gruppe elever.

Åbning mod eval. af flere komp.(aspekter)

I deres klassiske rene former, er der ret snævre grænser for, hvilke (aspekter af) de matematiske kompetencer, skriftlige og mundtlige prøver kan evaluere. Det er især de opfindsomheds-, fordybelses- og tidskrævende sider af kompetencerne, som har vanskeligt ved at blive sat på dagsordenen i sådanne prøver. De nævnte opblødninger af de skriftlige og mundtlige prøver og eksamener åbner for evaluering af flere sider af kompetencerne, end tilfældet er med de rene former, men der er stadig grænser for, hvad man kan opnå i den henseende. Navnlig evaluering af elevers evne til fx at genemføre hele komplekse modelleringsforløb, at udfinde og gennemføre ikke-rutinepræget problemløsning eller matematiske beviser, eller at producere større og sammenhængende stykker af matematisk tekst kræver andre rammer end dem, som er til rådighed ved de modificerede prøve- og eksamensformer.

Tilkomst af nye former

Nye prøve- og eksamensformer

Efterhånden som matematikundervisningen i løbet af de sidste to-tre årtier er blevet forandret, sådan at et bredere spektrum af undervisnings- og arbejdsformer har vundet et vist fodfæste i matematikundervisningens praksis, er der også sket en vis udvikling i de prøve- og eksamensformer, man betjener sig af rundt omkring i undervisningssystemet. Her er det ikke mindst den stigende inddragelse af projektarbejde, først ved nogle universiteter, siden ved andre videregående uddannelsesinstitutioner og i folkeskolen og de gymnasiale uddannelser, som har givet anledning til forandringer.

Projektarbejde

Det er nu flere steder blevet mere almindeligt også at foranstalte gruppeprøver af projektarbejde udført af mindre grupper af elever eller studerende, enten over et længere tidsspan, eller på stedet i eksamenssituationen, sådan som det benyttes ved folkeskolens afsluttende projektprøve i matematik, hvor eleverne i små grupper arbejder med en to-timers projektopgave under observation og udspørgning af lærer og censor. I betragtning af kompleksitetsmulighederne i matematikrelateret projektarbejde giver det sig selv, at evaluering af projektarbejde åbner mange muligheder for at indlemme en evaluering af en hel del af de matematiske kompetencer.

Gymnasiets tredjeårsopgave

I det almene gymnasium har også elevers individuelle arbejde med den såkaldte tredjeårsopgave, hvis den udføres i matematik, åbnet nye evalueringsveje på eksamensniveau. Det forhold, at eleverne indleverer en samlet afrundet matematisk tekst til bedømmelse, stiller direkte fordringer om evaluering af en hel del af kompetencerne, alt efter tredjeårsopgavens art og tema. I alle fald står tankegangs-, repræsentations-, symbol- og formalismekompetence, samt kommunikationskompetence centralt i besvarelsen af tredjeårsopgaven.

De klassiske former dominerer

Det må imidlertid ikke glemmes, at sådanne nyudviklede prøve- og eksamensformer fortsat indtager en beskeden plads i den samlede evalueringsvirksomhed i tilknytning til matematikundervisningen i Danmark. Dertil kommer, at hverken de klassiske eller de mere “moderne” evalueringsformer indtil nu har gjort afdækningen og artikuleringen af matematiske kompetencer til en hovedsag. Men til sammen rummer de et potentiale for at komme et stykke vej i den henseende.

Fortsat behov for nye prøve- og eksamensformer

Fortsat behov for nyudvikling

Imidlertid er der stadig et stort behov for løbende at udtænke, afprøve og vurdere nye prøve- og eksamensformer. Som et i princippet tilfældigt valgt eksempel på sådanne skal vi, for illustrationens og inspirationens skyld, omtale en to-leddet eksamensform, som blev indført i matematikstudiet ved Roskilde Universitetscenter omkring 1997. For en god ordens skyld skal det understreges, at selve kompetenceterminologien kun har været anvendt i begrænset omfang i forbindelse med denne eksamensform, og kun i de allerseneste år.

Et eksempel: Skriftlig prøve med mundtligt “forsvar”

Eksamen i to nærmere bestemte matematiske emnekredse (henholdsvis lineær algebra med supplementer og matematisk analyse) finder sted på følgende måde: Først afhenter de studerende på et nærmere bestemt tidspunkt et opgavesæt til individuel skriftlig besvarelse inden for tre arbejdsdage. Opgaverne er typisk ganske komplekse, ofte med åbne elementer. Ud over gængse spørgsmål af typen “Bevis at . . . ”, “Bestem . . . ”, “Find . . . ”, kan der fx være tale om spørgsmål som

Den skriftlige del

- “Undersøg om. . . ”
- “Formulér nogle hypoteser om forbindelsen mellem objekter af kategori A og objekter af kategori B, og søg hypoteserne bekræftet eller afkræftet gennem beviste påstande, eksempelstøttede formodninger, modeksempler eller lignende.”

- “Findes der objekter, som opfylder egenskaben P, men ikke egenskaben Q? Findes der objekter som opfylder Q men ikke P? Begrund de resultater du når frem til med beviste påstande eller eksempler.”
- “Udtænk og kommentér et eksempel, som illustrerer pointen i . . . ”

Sådanne spørgsmål indgår bl.a. for eksplicit at muliggøre evaluering (og dermed også udvikling) af tankegangs-, problembehandlings-, ræsonnements- og kommunikationskompetencerne, den sidste kun – på dette sted – i skriftlig form. Ofte vil nogle spørgsmål tillige lægge op til en evaluering af repræsentations- og hjælpemiddelkompetencerne. Sædvanligvis vil der også blandt spørgsmålene indgå nogle, som er opfindsomshedskrævende, og nogle, som fordrer teknisk overskud og gennemslagskraft. Det sidste muliggør skærpet evaluering af den studerendes symbol- og formalismekompetence. Derimod vil disse eksamensopgaver ikke indeholde modelleringsproblemstillinger. Modelleringskompetence evalueres således ved RUC’s matematikstudium i anden sammenhæng.

Efter at den studerende har afleveret deres skriftlige besvarelse (ledsaget af en tro-og-love erklæring om at have arbejdet med den uden hjælp fra andre), sendes denne til eksaminator og (ekstern) censor, som foretager en bedømmelse af besvarelsen.

Den mundtlige del

Efter ca. fjorten dage afholdes en mundtlig prøve. Her forklarer og forsvarer den studerende mundtligt sin besvarelse over for eksaminator og censor, som på baggrund af det skriftlige materiale stiller spørgsmål til dunkle eller svage punkter i fremstillingen, eller udsætter den studerende for udfordringer, fx af typen

- “På side . . . besvarer du spørgsmål x under de og de forudsætninger. Hvad nu hvis . . . ? Ville det give anledning til et andet svar? Hvis nej, hvorfor ikke? Hvis ja, hvordan, og hvorfor?”
- “Du har jo ikke besvaret spørgsmål y. Hvorfor ikke? Kan du forklare hvad hurdlen bestod i? Kan du i dag sige noget mere om spørgsmålet, fx foreslå et svar på det?”
- “Du gør en lidt ulden brug af begrebet z. Kan du fortælle os helt præcist hvad du forstår ved z og hvordan du bringer det i spil i den foreliggende sammenhæng?”

Ud over at den mundtlige prøve tjener det formål at sikre, at den studerende virkelige ejer og står inde for sin egen besvarelse, egner prøven sig også til at evaluere, til dels nye, træk ved tankegangs-, problembehandlings-, og ræsonnementskompetencerne (ofte også repræsentations- og symbol- og formalismekompetencerne), men navnlig den mundtlige del af kommunikationskompetence.

Én samlet karakter

Efter afslutningen af den mundtlige prøve tildeles den studerende én samlet eksamenskarakter, som rummer en integreret afvejning af den skriftlige og mundtlige prøve. Karakteren og den bagvedliggende præstation forelægges og diskuteres af eksaminator og censor med den studerende i en kort efterfølgende samtale.

Der kan måske være grund til at berette, at den beskrevne eksamensform af de studerende, som har været udsat for den – og det er med tiden en hel del – bedømmes som anspændende og krævende, men samtidig som meget relevant og dækkende for, hvad de egentlige hensigter og formål er med de kurser, som evalueres på denne måde.

Krævende men relevant eksamensform

Tilsvarende eksamensformer har ved 90'ernes slutning vundet indpas ved henholdsvis lærereksamen i matematik, hvor en individuel skriftlig 6-timers prøve finder sted efter en umiddelbart forudgående beskæftigelse inden for 48 timer med et udleveret forberedelsesmateriale, og ved HTX's eksamen til B-niveau i matematik, hvor man forsøgsvis har har ladet eksamen bestå i et projektarbejde, der strækker sig over tre uger og resulterer i en rapport, der forsvares ved et mundtligt tjek på ti minutter.

Lignende eksempler ved HTX og lærereksamen

9.4.2 Løbende evaluering

Klassiske former

Vender vi os dernæst mod løbende evaluering af eleverne, gennemført af læreren inden for rammerne af den daglige undervisning, er der i almindelighed større frihedsgrader i fastlæggelsen af de former og instrumenter, som er til rådighed, end tilfældet er ved afsluttende eksamener. I det omfang læreren betjener sig af prøver, er situationen dækket af den foregående diskussion.

Større frihed og fleksibilitet

Der er i Danmark en solid tradition for, at elevernes viden, kundskaber og færdigheder i matematik navnlig afdækkes og bedømmes gennem jævnlig besvarelse af skriftlige hjemmeopgaver, der typisk omfatter behandling af øvelser/problemer, i et spektrum rækkende fra rutineøvelser til (sjældnere) komplekse problemer, som fordrer ikke-rutinepræget overblik, kombinationsevne og opfindsomhed. Besvarelsen af sådanne opgaver tjener ikke alene evalueringsformål, men også lærings- og træningsformål. Opgaverne rettes og kommenteres af læreren, hvilket er et af matematikundervisningens væsentligste midler til at orientere diverse interessenter om lærerens syn på elevens standpunkt og udvikling. I skolen danner lærerens bedømmelse af besvarelsernes kvalitet ofte en del af grundlaget for tildeling af standspunktskarakter, mens man ved de videregående uddannelser enten lader besvarelsens kvalitet indgå i afgørelsen af om et kursus er beståat eller ej, eller slet ikke drager konsekvenser af besvarelseskvaliteten på systemniveau.

Skriftlige hjemmeopgaver

Bortset fra at opgaverne ikke er udarbejdet under samme tidspres som ved prøver og eksamener, og fra at eleverne kan have modtaget forskellige former for hjælp under besvarelsen, er opgaverne ofte af samme art som dem, der optræder i prøver og eksamener. Det er derfor i hovedsagen de samme kompetencer, som kan komme til udtryk og afdækkes i de to slags sammenhænge.

Tavlefremlæggelser

Ud over besvarelsen af skriftlige hjemmeopgaver er det gængs praksis i dansk matematikundervisning, at eleverne ved tavlen får lejlighed til mundtligt med skriftlig støtte at fremlægge stofdele eller opgavebesvarelser. Også disse aktiviteter tjener flere forskellige formål på én gang, hvoraf evalueringsformålet kun er ét. Evalueringsformålet indløses især ved, at læreren (i sjældnere tilfælde også kammeraterne) kommenterer kvaliteten af elevens fremlæggelse, og – når det er på programmet – lader den indgå i sin tildeling af standpunktskarakter til eleven. Det er oplagt, at sådanne tavleaktiviteter tillader evaluering af sider af kompetencerne, som ikke så let kan evalueres i tilknytning til skriftlige arbejder. Det drejer sig frem for alt om kommunikationskompetence, men også om tankegangs-, ræsonnements-, repræsentations- og symbol- og formalismekompetencerne.

Inddragelse af nye former

Med den udvikling, som har fundet sted i matematikundervisningens former i løbet af de sidste tre årtier, er der også åbnet nye behov og muligheder for løbende evaluering. Dette er først og fremmest sket i sammenhæng med elevarbejde i grupper, hvor lærerens rolle gerne er en blanding af vejlederens og iagttagerens, hvilket giver anledning til inddragelse af nye muligheder for evaluering af de matematiske kompetencer, som vanskeligt kommer til udtryk i traditionelt skriftligt eller mundtligt arbejde. Derimod har anvendelsen af essays, logbøger og porteføljer, jf. omtalen ovenfor, såvidt vides ikke nogen større udbredelse i dansk matematikundervisning.

Nye former

Men også i den løbende evaluering er der behov for udvikling af nye former og instrumenter, der går i spænd med indvindingen af nyt land for undervisning og læring.

Elevkonstruktion af opgaver

Der kan fx være tale om at bede elever om at konstruere opgaver, som lever op til på forhånd fastsatte specifikationer. Det kunne være, at opgaven skal illustrere en bestemt teoretisk pointe, såsom

- “Konstruer en virkelighedsrelateret matematikopgave, der dels viser forskellen på vækst i procent og vækst i procentpoint, dels godtgør, at man ikke ubekymret kan addere procenter.”
- “Konstruer en opgave, der viser, at proportionalitet ikke altid er et karakteristisk træk ved problemstillinger fra virkeligheden.”
- “Konstruer en matematikopgave, der illustrerer, hvorfor man ikke, i differentialregningens middelværdisætning, kan slække på forudsætningen om funktionens kontinuitet på det afsluttede interval.”

Eleverne udveksler opgaverne efter et eller andet system, løser deres kammeraters opgaver, hvorefter forskelle, ligheder, pointer, gode og dårlige idéer diskuteres enten i mindre grupper eller i hele klassen/holdet. Evalueringen af resultaterne sker derefter i fællesskab mellem elever og lærer. Atter er en stor del af kompetencerne på dagsordenen i en sådan evaluering, men aktiviteten er særligt egnet til at bringe tankegangs-, ræsonnements- og kommunikationskompetencerne i fokus.

En anden mulighed er at bede par af elever producere skriftlige kommentarer til og rettelser af hinandens opgavebesvarelse, hvorefter de kommenterede besvarelser afleveres til læreren til videre kommentering og bedømmelse.

Elever som opgaverettere

Endnu et eksempel tager særligt sigte på at evaluere (og udvikle) tankegangskompetence sammen med formalismesiden af symbol- og formalismekompetence, i sammenhæng med ræsonnements- og repræsentationskompetence. Det er en form, som gennem årene er blevet benyttet ved megen kursusundervisning ved RUCs matematikstudium, hvor kurset har været centreret om gennemarbejdningen af en lærebog. Med mellemrum, efter afslutningen af større afsnit i bogen (kapitler, sektioner, eller hvordan det nu passer), fx i størrelsesordenen 50 sider, er de studerende, enkeltvis eller i grupper, som det nu er faldet for, blevet bedt om på maksimalt 5 sider (begrænsningen er afgørende) at kondensere, i organiseret og konsistent form, de væsentlige bærende begreber, konstruktioner og resultater i de pågældende afsnit. At foretage udvælgelsen af, hvad der er essentielt og hvad der er mindre vigtigt, og skelne mellem almene begreber og eksempler osv., har vist sig som en stor og krævende, men også meget givende, udfordring for de studerende. Ofte er de studerendes forskellige, og ikke sjældent konkurrerende, bidrag alle blevet præsenteret for holdet, hvorefter en diskussion, ledet af læreren, har fundet sted med henblik på at opnå et fælles kondensat af det behandlede afsnit. Denne form har givet læreren særdeles gode muligheder for at få indblik ikke blot i den enkelte studerendes udvikling af de omtalte kompetencer, men også i undervisningens succes med at gøre vitale træk ved matematisk teoriopbygning til genstand for de studerendes bevidste tilegnelse.

Afdækning af de bærende konstruktioner i mat. stof

9.4.3 Tilretning af kendte evalueringsformer til kompetenceformål

Som det fremgår, er der i virkeligheden et ganske stort repertoire af traditionelle og innovative evalueringsformer og -instrumenter til rådighed for evaluering matematiske kompetencer. Hovedopgaven her er imidlertid at indrette og målrette de pågældende former og instrumenter, så de eksplicit sigter mod evaluering af disse kompetencer. Det fordrer, at man for hver evalueringsform og -instrument gør klart hvilke kompetencer, man ønsker at benytte dem til at evaluere, samt præciserer på hvilken måde dette nærmere skal ske. Heri ligger et betragteligt, men overkommeligt udviklingsarbejde.

Det er desuden nødvendigt at være opmærksom på, at nogle af de skitserede adækvate evalueringsformer er ret tids- og ressourcekrævende. Men det er en omkostning, som i alle fald må afholdes, hvis man seriøst ønsker at tilvejebringe en dækkende, gyldig og pålidelig evaluering af elevers matematiske kompetencer.

Adækvate eval.former er ofte tids- og ressourcekrævende

9.5 Evaluering af den enkelte kompetence

Bidrag fra forskning

Den matematikdidaktiske forskning har allerede længe beskæftiget sig med at finde veje til evaluering af nogle af kompetencerne, om end ikke nødvendigvis under anvendelse af dette ord. Det drejer sig frem for alt om problemløsnings-, ræsonnements-, repræsentations-, og symbol- og formalismekompetencerne samt enkelte dele af tankegangskompetencen. I nyere tid er også modellerings- og hjælpemiddelkompetencerne samt til dels kommunikationskompetencen blev gjort til genstand for undersøgelse. Derimod er der gjort meget lidt ud af at søge samlede kompetenceprofiler beskrevet og evalueret. Det nærmeste man kommer forsøg på noget sådant er vel de igangværende PISA-undersøgelser[2], der indebærer en international sammenligning af, hvad man kunne kalde 15-åriges matematiske kompetenceprofiler i en lang række lande.

OECD – PISA

Hidtil har vi betragtet diverse evalueringsformer og -instrumenter i lyset af deres større eller mindre egnethed til at evaluere dele af det matematiske kompetencespektrum. Derimod skylder vi stadig at komme nærmere ind på, hvordan man kan detektere, karakterisere og bedømme en persons besiddelse af en given kompetences tre dimensioner. Det skal allerede på dette sted gøres klart, at der ikke foreligger noget færdigt svar på denne opgave. At opnå det er, som før fremhævet, en ikke forsvindende forsknings- og udviklingsopgave, som ligger uden for rammerne af dette projekt.

Karakterisering af en persons besiddelse af en komp.s tre dimensioner

På bar bund er vi dog ikke. Vi er i stand til gennem udvalgte eksempler at illustrere, hvordan opgaven kan behandles. Fælles for eksemplerne er, at de vedrører besiddelsen af en bestemt matematisk kompetence hos en tænkt elev på et bestemt undervisningstrin. En total kortlægning af feltet ville indebære betragtning ikke blot at samtlige kompetencer kombineret med samtlige undervisningstrin, men også af forskellige kategorier af elever set i forhold til den pågældende kombination, alt i alt et meget omfattende sæt af eksempler.

9.5.1 Eksempel 1: Tankegangskompetence hos en 8. klasses elev

En tænkt elev i 8. klasse

Lad os forestille os en konkret folkeskoleelev, en dreng, D, i 8. klasse, hvis tankegangskompetence vi ønsker at beskrive. Lad os videre forestille os, at den følgende tænkte beskrivelse hviler på mange forskellige observationer af hans virksomhed i gruppearbejde, ved besvarelsen af skriftlige opgaver, og i svar på spørgsmål samt diskussioner i klassen.

Dækningsgrad

Fokus på kvantitative spørgsmål

I sammenhæng med optællinger og beregninger af rent eller anvendt matematisk

[2] Se fx Andersen et al. (2001) og OECD (1999, 2001).

art er D i stand til på egen hånd at stille matematiske spørgsmål af kvantitativ type, såsom

- “Hvor mange er der af. . . ?”
- “Hvad får vi, når . . . ?”
- “Hvor meget giver det?”
- “Hvor mange procent bliver. . . ?”
- “Hvilken situation giver flest. . . ?”

Han har i den forbindelse blik for, at man ofte ved matematiske metoder - ikke mindst sådanne, som kan involvere en lommeregner - kan forvente at opnå svar på spørgsmålene i form af entydige talmæssige angivelser. Han har derimod ikke blik for, at der kan foreligge situationer, hvor kvantitative spørgsmål ikke nødvendigvis har et entydigt svar, eller et svar overhovedet.

D’s matematiske begreber er i hovedsagen forbundne med naturlige og positive rationale tal, bortset fra at han kender navnene på gængse geometriske figurer. Begrebernes rækkevidde knytter sig til selve talområdet, reguleret af regnereglerne, og til situationer fra dagligdagen, hvor tallene optræder ledsaget af enheder. Han har ikke sans for indebyrden af en definition. For eksempel kan han kun sige, hvad en brøk er, ved at nævne nogle konkrete eksempler. Han har efter alt at dømme ingen forestillinger om, hvad abstraktion af matematiske begreber eller generalisation af matematiske resultater består i. I den forbindelse har han vanskeligt ved at skelne mellem påstande om et mindre antal enkelttilfælde og påstande om en hel klasse af situationer, dvs. matematiske sætninger. Han har også vanskeligt ved at skelne mellem definitioner og sætninger, idet han synes at opfatte de definerende egenskaber ved fx geometriske figurer som sætninger om dem. At de fleste matematiske udsagn er betingede, dvs. hviler på udtalte eller uudtalte forudsætninger, er der ikke tegn på, at han har forståelse af. At en given påstand derfor kan være sand i nogle forbindelser, men ikke i andre, er han ikke opmærksom på.

Fokus på det konkrete og eksempelbaserede

Sammenfattende er dækningsgraden i D’s tankegangskompetence ganske beskeden, idet den i hovedsagen omfatter klarhed over, at visse typer af kvantitative spørgsmål og svar er karakteristiske for matematik. Derudover rummer denne kompetence meget snævre forestillinger om matematiske begrebers rækkevidde, givet ved deres konkrete forankring i de – typisk dagligdags – situationer, hvori de har været bragt i spil.

Beskeden dækningsgrad

Aktionsradius

D har let ved at bringe sin i øvrigt smalle opfattelse af matematisk tankegang – som bestående i at stille og forvente svar på kvantitative spørgsmål – i forbindelse med mange forskellige typer af situationer, navnlig, men ikke udelukkende, uden for matematikken. Han kan således få øje på kvantitative spørgsmål i allehånde dagligdags situationer, hvor man kunne interessere sig for at spørge om først, størst, hurtigst, stærkest, ældst, yngst, rigest, flest, mindst, længst osv.. Ikke mindst i sammenhæng med lege, spil og væddemål er han tilbøjelig til at formulere kvantitative spørgsmål. Han er tillige på det rene med, at i mange hverdagssammenhænge skal der matematiske beregninger til at finde et svar, ikke mindst hvis pengetransaktioner er på tale. Han kan også stille kvantitative spørgsmål i hverdagssammenhænge, hvor måling og vejning, m.m. indgår, ligesom samfundsstatistiske spørgsmål af deskriptiv art indgår i hans repertoire. I internt matematiske sammenhænge har han let ved at komme på spørgsmål vedrørende talmæssige udregninger, hvor han så forventer, at der gives entydige svar. De kan næsten altid leveres af en lommeregner. Han kan dog også stille spørgsmål om, hvor mange tal, der findes i verden, samt om hvad det mindste henholdsvis det største tal er. Her har han til gengæld ikke en klar fornemmelse af, at svarene på disse spørgsmål ikke er af simpel kvantitativ art, men af typen

Blik for kvantitative forhold

- “Uendeligt mange.”
- “Det afhænger af, hvilket talområde, man tager i betragtning. Er det fx samtlige rationale tal (eller samtlige positive rationale tal), findes der hverken et mindste eller et største. Er det fx kun de ikke-negative rationale tal, er 0 det mindste, mens der ikke findes noget største tal.”

Ret stor aktionsradius

Sammenfattende har D’s tankegangskompetence, givet dens dækningsgrad, en ganske stor aktionsradius, når det gælder sammenhænge og situationer fra hverdagen og virkeligheden, mens den internt matematiske aktionsradius er begrænset til spørgsmål og svar angående tal og talmanipulation.

Teknisk niveau

Som det fremgår, knytter D’s tankegangskompetence sig først og fremmest til kvantitative anliggender. Hvad nærmere angår det tekniske niveau, hvorpå han kan aktivere denne kompetence, er der tale om sammenhænge, som omfatter naturlige tal (og 0), der af D identificeres med deres fremstilling i titalssystemet, endelige decimalbrøker med ret få decimaler samt standardbrøker. Han tager det således for givet, at et naturligt tal simpelthen er identisk med dets fremstilling i titalssystemet. Til gengæld kan han gøre klart og korrekt rede for, hvad cifrene i et flercifret tal står for, tilsvarende med de første 3-4 decimaler i en decimalbrøk. Derimod er han ikke klar over forholdet mellem brøker og decimalbrøker. Han kan endvidere kun sjældent stille spørgsmål og forestille sig svar vedrørende negative tal, uendelige decimalbrøker, periodicitet af decimalbrøker, ligesom han næsten ikke inddrager

Fokus på konkrete tal, aritmetik og lommeregnerbrug potensfremstillede tal i sin udøvelse af matematisk tankegang. Irrationale tal tages ikke i betragtning. Heller ikke algebraiske, symbolbundne talanliggender indgår naturligt i hans opmærksomhedsfelt. Det samme gælder funktionsbegrebet. De former for spørgsmål og svar han opererer med vedrører næsten udelukkende klassisk rational aritmetik, altså de fire regningsarter samt procenter udført på konkrete rationale tal, ikke mindst sådanne som optræder i omgivelserne og i hverdagen. I den forbindelse kan han også formulere spørgsmål, der inddrager enkle statistiske deskriptorer som gennemsnit og "de øverste 10%". Svarene på den slags spørgsmål tilvejebringes efter D's opfattelse hurtigst og bedst af en lommeregner. Han er dog på det rene med, at man principielt selv kan producere svarene, det tager blot for lang tid og fører let til fejl. Inden for det nævnte afgrænsede terræn udviser han en betydelig adræthed i sin aktivering af tankegangskompetence.

Geometriske navne

Skønt D kender begreber og navne på gængse geometriske figurer som trekanter, rektangler, kvadrater, cirkler osv., kommer han ikke selv på geometriske spørgsmål. Tilsvarende har han svært ved at se geometriske udsagn som svar på - eventuelt implicitte - spørgsmål. Han opfatter tilsyneladende geometriske anliggender som en sag om navngivning, ikke som et spørgsmål om egenskaber, man kan spørge til og forvente svar om. Han har kun et begrænset blik for de begrebslogiske hierarkier på området, som fx kvadrat-rektangel-firkant.

Beskedent teknisk niveau

Sammenfattende kan D aktivere sin tankegangskompetence på et beskedent teknisk niveau, der er domineret af rational aritmetik med lommeregnerstøtte. Inden for dette terræn er hans tankegangskompetence teknisk set temmelig veludviklet. Uden for det kan han kun aktivere kompetencen spredt og usystematisk, også når det gælder felter, som faktisk har indgået i den undervisning, han har modtaget, som fx funktioner, geometri og ligninger.

9.5.2 Eksempel 2: Modelleringskompetence hos en 2. g. elev

En tænkt elev i 2. g.

Lad os nu gå over til at forestille os en pige P, som er elev i det almene gymnasiums 2. g., hvor hun er i færd med at fuldføre matematik på B-niveau. Vi ønsker at beskrive P's modelleringskompetence, også her på basis af tænkte observationer af hendes virksomhed i den daglige undervisning, herunder hendes besvarelse af skriftlige opgaver, inklusive prøver, hendes bidrag til gruppearbejder og mindre projekter, hendes mundtlige aktivitet ved tavlen og i klassen som helhed.

Dækningsgrad

P er i stand til med grundighed, omhu og klarhed at analysere grundlaget for samt rækkevidden og holdbarheden af de konkrete matematiske modeller, hun har haft lejlighed til at arbejde med i gymnasiet. I den forbindelse er hun god til at afdække de antagelser og forudsætninger, som en model hviler på, og at sætte dem i relation til, hvad modellen kan udsiger noget om, og hvad den ikke tager i betragtning. Hun

Fokus på relationen model–virkelighed

er sædvanligvis tillige i stand til at afkode og fortolke modelelementer og -resultater i forhold til de situationer, som modelleres. Derimod har hun sværere ved at afdække og bedømme modellernes mere principielle matematiske egenskaber, ud over hvad der umiddelbart kommer til udtryk i de resultater, som frembringes ved konkret brug af modellen.

Når det gælder aktiv modelbygning, er P nok i stand til at strukturere den situation, der skal modelleres, herunder at udvælge de elementer, og koblinger mellem dem, som skal tages i betragtning. Derimod har hun oftest meget svært ved at gennemføre en frugtbar matematisering, der kan lede til opstillingen af en matematisk model. Her har hun navnlig problemer med at få øje på og vælge de idealiseringer og begrænsninger, samt at håndtere de informationstab, som er nødvendige for enhver matematisering. Når imidlertid en model foreligger, typisk med andres hjælp, kan hun foretage en matematisk behandling af modellen, så længe behandlingen kan opnås ved hjælp af velkendte metoder. Derved kan hun opnå matematiske resultater og konklusioner, som hun udmærket er i stand til at fortolke og bedømme i forhold til den situation, modellen søger at beskrive. I den forbindelse kan hun anlægge *common sense* betragtninger til validering af modellen, mens hun ikke behersker mere dybtgående eller sofistikerede midler, fx af teoretisk eller statistisk art, til at gennemføre en mere indgående validering af modellen. Hun har vanskeligt ved selv at modificere eller forbedre en utilstrækkelig model og ved at forestillle sig eller opstille alternativer. Hun har et veludviklet overblik over den samlede modelleringsproces, selv om hun, som nævnt, har vanskeligt ved at styre hele processen, fordi hun har problemer med nogle af dens vigtige punkter, hvilket hun selv er helt klar over. P er god til at kommunikere med andre om en model hun har været indblandet i opstillingen af, også vedrørende de punker, hun selv har svært ved at udføre.

Vanskeligheder med matematisering

Fokus på det velkendte

Ret høj dækningsgrad i det grundliggende

Sammenfattende har P's modelleringskompetence en ret høj dækningsgrad, hvad angår grundtrækkene i analyse og bygning af matematiske modeller, men vigtige punkter vedrørende matematisering og håndtering af mere sofistikeret, ikke-rutinepræget matematisk behandling af modellerne er kun i ringe grad dækket af hendes kompetence.

Aktionsradius

Fokus på vækst- og henfaldsproblemstillinger

P's modelleringskompetence angår først og fremmest problemstillinger vedrørende vækst og henfald. Hun har efaringer med aktiv modellering dels af vækst af menneske- og dyrepopulationer, bl.a. epidemispredning, dels af ændringer i økonomiske og finansielle størrelser, herunder lån og opsparing, samt af radioaktivt henfald. Sådanne vækstproblemstillinger kan hun behandle med overblik og sikkerhed, med hensyn til aktiv modellering dog især når de har et vist standardpræg. Derimod har hun ikke let ved at håndtere andre typer af modelleringssituationer, fx vedrørende geometriske former, tekniske, fysiske og kemiske sagsforhold, tilfældige fænomener m.v. De situationer, hun skal kunne håndtere, skal helst være delvis struktureret og præpareret i forvejen, så det ikke er nødvendigt at begynde på helt bar bund, fx med indsamling af basale informationer. Kommer hun ud for helt nye situationer med vækst eller henfald, som ikke rummer en hel del kendte træk, har hun meget svært ved at komme i gang med en modellering.

Sammenfattende har P's modelleringskompetence en beskeden aktionsradius, som i høj grad er bestemt af hendes hidtidige erfaringer med modeller og modelbygning. Efter alt at dømme kan hendes aktionsradius i denne henseende kun udvides gradvis, gennem grundig beskæftigelse med nye typer af modelleringssituationer.

Beskeden aktionsradius

Teknisk niveau

P kan først og fremmest aktivere sin modelleringskompetence i sammenhænge, hvor lineære eller andre polynomielle funktioner, potensfunktioner, eller eksponential- og logaritmefunktioner, helst i ren form, står centralt i sammenhængen. Hun har vanskeligere ved at inddrage trigonometriske funktioner i modelleringsforbindelser, fordi hun, p.g.a. deres periodiske svingninger, ikke har let ved at se dem som forbundet med de vækstspørgsmål, hendes modelleringserfaringer er knyttet til. Inden for modeller præget af de førstnævnte funktionsklasser, kan hun med ret stor sikkerhed udnytte sit grundige fænomenologiske kendskab til de pågældende funktioner i modelbehandlingen. Det gælder også, når spørgsmål som væksthastighed eller -rate kræver begreber og resultater fra differentialregningen. Derimod har hun ikke tekniske forudsætninger for at forstå eller behandle modeller på differentialligningsform. Heller ikke andre ligningsformulerede modeller er hun god til at konstruere - det volder hende generelt kvaler at sigte mod opstilling af ligninger som middel til at modellere situationer. Foreligger der derimod allerede en model på eksplicit ligningsform, kan hun sædvanligvis godt løse de indgående ligninger, hvis de er af en art, som har været på dagsordenen i den matematikundervisning hun har modtaget.

Fokus på "vækst"-funktioner

Vanskeligheder med ligninger

Hun er stort set ude af stand til at benytte statistiske metoder til parameterestimation, regressionsanalyse og test i valideringen af modelresultater i forhold til empirisk foreliggende data. Det skyldes bl.a. at disse spørgsmål kun har været nødtørftigt strejfet i undervisningen. Derimod kan hun godt benytte grafiske metoder til på grundlag af *common sense*-overvejelser at foretage en sammenligning af modelresultater og data.

Sammenfattende er det tekniske niveau for P's modelleringskompetence nogenlunde højt, givet det stof hendes undervisning har omfattet. Dog kan hun kun i ringe grad aktivere tekniske kundskaber vedrørende geometri, trigonometriske funktioner, ligninger og statistik til modelleringsformål. I disse henseender er der basis for højnelse af P's tekniske niveau.

Nogenlunde højt teknisk niveau inden for et begrænset repertoire

9.5.3 Eksempel 3: Symbol- og formalismekompetence hos en studerende

Tænkt naturvidenskabsstuderende på indledende trin

Til sidst forestiller vi os en kvindelig studerende, K, på første eller andet år af et naturvidenskabeligt præget studium, som er matematikforbrugende, men ikke er et studium i matematiske fag. Man kunne fx tænke på studerende inden for biologiske eller kemiske fagområder, eller ved en naturvidenskabelig basisuddannelse eller en ingeniøruddannelse, som er i færd med at tage et indledende matematikkursus. Tanken er at karakterisere K's symbol- og formalismekompetence på basis af observationer af hendes individuelle besvarelse af skriftlige øvelsesopgaver og uformelle prøver, af hendes aktivitet på holdet og i gruppearbejde under lærervejledning, samt rapporter fra korte gruppeopgaver, som hun har bidraget til.

Dækningsgrad

K udviser en betydelig fleksibilitet og gennemslagskraft i sin omgang med symbol- og formelsprog, både når det gælder det at kunne følge andres symbol- og formelbehandling, og når det gælder selv at kunne udføre en målrettet, korrekt og effektiv manipulation af symbolholdige udsagn og formler. Hun er i den forbindelse meget orienteret mod, og har godt styr på, de spilleregler, som gælder for opskrivning og manipulationen af symbolholdige udtryk og formler, og på grund af en veludviklet teknisk rutine begår hun kun sjældent fejl i sådanne sammenhænge. Derimod er hendes forståelse og fortolkning af, hvad symbol- og formelbehandlingen dækker over, ikke helt så veludviklet. Hun er med andre ord vældigt god til at spille symbol- og formelspil, også i resultatorienteret forstand, men ikke så god til at se mening i spillet, hvilket hun heller ikke ser ud til at have noget stort behov for. Når det gælder formelle matematiske systemer, typisk opbygget som en samlet teori, har K derimod svært ved at forstå, hvad det hele går ud på, bortset fra når teorien leder frem til kalkulatoriske resultater og metoder, som hun så koncentrerer sig om at beherske, oftest uden noget klart blik for deres rolle i det samlede system, som hun er tilbøjelig til at ignorere eller opfatte som skræmmende, irriterende eller pedantiske udenværker.

God til symbol- og formelspil, men ikke til fortolkning

Begrænset dækningsgrad

Sammenfattende er K en meget kompetent symbol- og formelmanipulator, men ikke nogen god forståer og fortolker af hvad der er på færde neden under symbol- og formelbrugen. Hendes blik for karakteren og betydningen af formelle matematiske systemer er nærmest fraværende. Hendes symbol- og formalismekompetence har dermed en klart begrænset dækningsgrad, som det vil kræve en solid indsats at udvide.

Aktionsradius

K's veludviklede evne til symbol- og formelbehandling medvirker til, at hun kan begå sig både i rutineprægede situationer og i situationer hun ikke har været i før, men som kan håndteres med det apparat hun har til rådighed. Det gælder, hvad enten der er tale om internt matematiske situationer eller om anvendelsessituationer. Hvad det sidste angår, er det en forudsætning, at anvendelsen af matematik enten er lagt til rette eller giver sig selv. Hendes gennemslagskraft er størst i situationer, hvor symbol- og formelbehandlingen har til formål at føre til et veldefineret – men ikke dermed entydigt – resultat, gerne af kalkulatorisk art. Hun lider ikke af den ellers udbredte identifikation af et matematisk symbol med den genstand, det symboliserer. Således er hun også i stand til at håndtere situationer, hvor gængse symboler er erstattet af andre, mindre gængse, symboler, men hvis der brydes mere grundlæggende med traditionen – fx ved at variable navngives a, b eller c, mens konstanter kaldes t, x,y, og funktioner kaldes m, n og p – opstår der nogen usikkerhed hos K. Denne usikkerhed kan dog i almindelighed overvindes, hvis hun først tager sig tid til at indprente sig, hvilken rolle symbolerne nu indtager.

Kan håndtere nye situationer, hvor symboler er indført

K har ikke let ved selv at indføre symbolske betegnelser i situationer, hvor de ikke er introduceret i forvejen, med mindre situationen er af en kendt type, som når man kan navngive koordinater, funktioner, matricer, egenværdier m.v. i overensstemmelse med traditionen. At der i en matematisk situation træffes væsentlige beslutninger, når man afgør, hvilke objekter der spiller så stor en rolle, at de skal tillægges et symbol, er ikke omfattet af K's symbol- og formalismekompetence.

Svært ved selv at indtænke symboler

Sammenfattende har K's symbol- og formalismekompetence en ret stor aktionsradius relativt til dens dækningsgrad, dvs. i forhold til sammenhænge og situationer, der ikke involverer fortolkning af symbolsk aktivitet samt omgang med formelle matematiske systemer.

Relativt stor aktionsradius

Teknisk niveau

Det tekniske niveau i K's symbol- og formalismekompetence knytter sig, ud over til hendes gymnasiale kundskaber, til reelle funktioner af én eller flere variable samt til lineær algebra i talrum. Hun kan både håndtere symbol- og formelproblemstillinger vedrørende konkrete eksempler på funktioner, vektorer, matricer, egenværdier, osv. og vedrørende generelle eksemplarer, det sidste forudsat at rammerne for symbol- og formelbehandlingen er klare og ikke kræver indblanding af mere intrikate teoretiske problemer og betragtninger. Symbol- og formelhåndtering af differentiation, integration, rækkeudvikling, rækkekonvergens, bestemmelse af egenværdier, diagonalisering af matricer osv. har hun et vældigt godt greb om i teoretisk uproblematiske standardsituationer, hvor forudsætningerne for udnyttelsen af de kendte procedurer er opfyldt. Skal der derimod udvises originalitet og opfindsomhed, fordi situationen ikke fuldt ud er dækket af velkendte fremgangsmåder, kan hun almindeligvis ikke stille så meget op.

Fokus på reelle funktioner og lineær algebra i standardsituationer

K kan kun i ringe udstrækning begå sig i formelle matematiske systemer. Det betyder, at hun har svært ved afgøre hvad der lovligt følger af hvad i et sådant system, og hvad der ikke kan lade sig gøre, med mindre betragtningerne er hægtet op på

Vanskeligt ved formelle mat. systemer

symbol- og formelbehandling. Og det gælder, hvad enten hun skal følge andres fremstilling, eller – især – hvis hun selv producerer en sådan. Hun er tilbøjelig til at lære betingelserne for anvendelsen af regler og procedurer udenad, hvilket hun er god til.

Højt teknisk niveau

Sammenfattende er det tekniske niveau for K's symbol- og formalismekompetence højt, set i forhold til kompetencens begrænsede dækningsgrad. Var hun i stand til i højere grad at begå sig i situationer som kræver teoretisk overblik eller orginalitet og opfindsomhed, ville det være meget højt.

9.5.4 En kompetences "volumen"

Ønsker man af den ene eller den anden grund at foretage en sammenfattende helhedsbedømmelse af en given elevs besiddelse af en bestemt matematisk kompetence, fx til brug for en summativ evaluering af elevens standpunkt, måske i form af en karakter, muliggør den her indførte dimensionsbeskrivelse en sammenvejning af de tre dimensioners relative styrke i kompetencebeskrivelsen. Således kan en markant realisation af den ene dimension tænkes at kunne afbalancere en svagere realisation af de to andre.

"Volumen" = "produktet" af dimensionerne

Med en metafor: Man kan billedlig talt forestille sig kompetencenbesiddelsen "målt" ved "produktet" af realisationerne af de tre dimensionerne, altså ved en slags "volumen". Det ligger i denne metafor, at kompetencebesiddelsen i alt bliver tillagt målet 0, hvis en af dimensionerne ikke er realiseret for den pågældende elev, hviket er en naturlig følge af selve kompetencebegrebet Hvis enten dækningsgraden, aktionsradius eller det tekniske niveau er ikke-eksisterende, foreligger der slet ingen kompetence. Det ligger endvidere i metaforen, at forskellige elever kan have samme volumen i besiddelsen af en kompetence, selv om de indgående dimensioner har helt forskellige formater.

Del VI

Videre frem: Udfordringer og anbefalinger

10 En karakteristik af udvalgte centrale problemer vedrørende den danske matematikundervisning

10.1 Indledning

Befolkningens mat. kundskaber anses for vigtige

Befolkningens matematiske kundskaber (forstået helt bredt), og den matematikundervisning der gerne skal være en hjørnesten i frembringelsen heraf, tillægges traditionelt stor betydning i alle typer af samfund, ikke mindst i de teknologisk og økonomisk avancerede. I det 20. århundrede har disse forhold med mellemrum været genstand for betydelig samfundsmæssig opmærksomhed, i form af diskussioner, udviklingsarbejder og reformvirksomhed. Hovedproblemstillingen har gennemgående været følgende: Hvem i samfundet bør besidde hvilke matematikkundskaber, og hvorfor? I hvilken grad forsyner uddannelsessystemet i almindelighed, og matematikundervisningen i særdeleshed, de pågældende befolkningsgrupper med de ønskede kundskaber? I det omfang dette ikke sker på tilfredsstillende vis, hvad kan der da gøres for at skabe forbedringer i situationen?

10.1.1 Meget går godt, men fokus her er på problemer og udfordringer

"Noget" burde forbedres

Det er denne problemstilling – måske i en ny skikkelse – som atter er blevet påtrængende i en dansk sammenhæng. "Noget" vedrørende sammenhængen mellem befolkningens faktiske eller ønskværdige matematikkundskaber og den underliggende matematikundervisning ser ud til ikke at være, som det burde.

Meget går godt

Samtidig er det væsentligt at holde sig for øje, at også mange ting i forbindelse med matematikundervisningen i Danmark fungerer godt; fx er der mange meldinger om, at eleverne i folkeskolen generelt er glade for matematikundervisningen, en stor andel af eleverne i det almene gymnasium vælger matematik på højt niveau, og Danmark klarer sig acceptabelt i internationalt sammenlignende undersøgelser som TIMSS og PISA (se fx Allerup et al. (1998) og Andersen et al. (2001)), på de højeste undervisningstrin endda godt.

Fokus på udfordringer

At fastholde sådanne positive elementer såvel i bevidstheden som i praksis i forbindelse med fremtidige ændringstiltag er en væsentlig del af udfordringen. Det gælder ikke mindst i dette projekt, hvor vi bevidst undlader en total kortlægning af situationen, men i stedet koncentrerer os om nogle sider af sagen, som vi eller andre finder, giver anledning til særlige udfordringer, som det er forventeligt, at man kan stille noget op med.

10.1.2 Vores perspektiv på problemfeltet

Fuldt objektiv analyse ikke mulig

Med udgangspunkt i så bredt formulerede og normativt betonede spørgsmål, som der her er tale om, er det naivt – og dybest set også udtryk for disrespekt for problemernes kompleksitet – at forestille sig, at man kan gennemføre en objektiv, endegyldig analyse af de forskellige problemstillinger. Der vil altid være tale om en delvis subjektiv, mere eller mindre bevidst afgrænsning af problemfeltet. Dette sagt for at understrege, at det følgende er *vores* perspektiv på sagen, hvilket allerede kommer til udtryk i de analytiske kategoriseringer, vi har valgt at strukturere arbejdet efter.

Tre slags problemstillinger: “hvorfor?”, “hvad?” og “hvordan?”

Fremstillingen her bygger således på en forestilling om, at (matematik-)undervisningens problemkompleks med fordel kan anskues som bestående af tre overordnede problemfelter: spørgsmål om hhv. “hvorfor”, “hvad” og “hvordan”. De problemstillinger, vi mener at kunne identificere i den forbindelse, kategoriserer vi som hhv. *begrundelsesproblemer, indholdsproblemer og implementationsproblemer*. I analysen i dette kapitel har vi valgt at koncentrere os om aspekter af hvorfor-spørgsmålet og hvordan-spørgsmålet, mens de indholdsmæssige problemstillinger er blevet behandlet tidligere i denne rapport.

Inden for problemfelterne om “hvorfor” og “hvordan” forsøger vi at identificere og karakterisere en række mere konkrete problemer og udfordringer, som de opleves af forskellige grupper i og omkring matematikundervisningen. I forbindelse hermed indfører vi for overblikkets skyld en grovskelnen, idet vi opererer med tre typer af matematikholdig uddannelse:

Matematikholdige almendannende uddannelser: Hermed menes uddannelser, der rummer matematikholdige elementer, og som sigter mod, som et konstituerende element, at bidrage til de deltagende personers almendannelse (her forstået som almen-gyldig personlighedsdannelse), viden og kunnen med “de mange” som målgruppe, jf. Niss (2000). Med den afgrænsning der følger af, at almendannelsessigtet er et konstituerende element, omfatter denne type uddannelse væsentligst – men ikke udelukkende – de matematikholdige dele af virksomheden i folkeskolen, de gymnasiale uddannelser og almen voksenuddannelse.

Matematikforbrugende uddannelser: Hermed menes uddannelser, der autoriserer og sigter mod at kvalificere de deltagende personer til at bestride professioner, hvor anvendelse af matematik i varierende grad har væsentlig betydning, men hvor professionalismen ikke kan karakteriseres som grundlæggende matematisk. Arkitekt, bankfuldmægtig, biolog, elektriker, farmaceut, industrioperatør, kranfører, købmand, politiker, sygeplejerske, tømrer og økonom er eksempler på professioner, som efter vores opfattelse lever op til disse kendetegn.

Matematiske professions-uddannelser: Hermed menes uddannelser, der autoriserer og sigter mod at kvalificere de deltagende personer til at bestride professioner, hvor professionalismen (bl.a.) kan karakteriseres som værende af grundlæggende matematisk art. Det gælder, som det mest oplagte, professionerne forsknings-matematiker og matematiklærer på alle niveauer, men også statistikere, fysikere, kemikere, astronomer, dataloger, aktuarer, landinspektører og visse typer af civilingeniører, samt lærere inden for disse fag, falder under denne kategori.

Hvem oplever problemer og udfordringer?

Desuden finder vi det hensigtsmæssigt at føje endnu en dimension til ved at interessere os for, *hvem* der oplever problemer eller udfordringer (af såvel begrundelses- som implementationsmæssig karakter) i forhold til hver af de tre typer uddannelse: Er det *aftagerne*[1] af de matematisk uddannede personer? Er det *tilrettelæggerne*[2] af de matematikholdige dele af uddannelsen? Er det *lærerne*? Er det *eleverne*[3]? Eller er det de fremtidige *brugere*[4] af matematikuddannelsens forventede resultater?

Krydser man de to analytiske dimensioner "matematikuddannelsestype" og "interessegruppe" får man følgende 3×5 -matrix:

Interessegruppe/ Uddannelse	Aftagerne	Tilrettelæggerne	Lærerne	Eleverne	Brugerne
Matematikholdige almendannende uddannelser					
Matematik-forbrugende uddannelser					
Matematiske professions-uddannelser					

[1] Spændende over erhvervslivet, efterfølgende uddannelsesinstitutioner og "samfundet" forstået som den amorfe størrelse, generalistpolitikere er valgt som formelle repræsentanter for.

[2] Spændende fra uddannelsespolitikere, som arbejder med de mest overordnede rammer, over uddannelsesplanlæggere, som beskæftiger sig med indretningen af læseplaner, til læreruddannere, som arbejder med de mere konkrete implementationsovervejelser i forbindelse med tilrettelæggelse.

[3] For at undgå hele tiden at skulle skrive elever og studerende, eller at tage stilling til hvilket ord der i en given sammenhæng er mest på sin plads, vil vi, som nævnt tidligere i rapporten, i hovedsagen bruge ordet "elev" om alle modtagere af undervisning, uanset trin.

[4] Spændende fra de matematik-professionelle over de matematikforbrugende professionelle til brugerne af de matematikholdige almendannende uddannelser, jf. omtalen ovenfor, alle med det særkende, at de har forladt (de matematikholdige dele af) uddannelsessystemet og nu gerne skulle kunne drage fordel af at have været der.

Hvis vi – uden at kaste os ud i en ny illustration – tilføjer den tredje analytiske dimension vedrørende typificeringen af problemet (begrundelses-, indholds- og implementationsproblemer), har vi i alt 45 ($3 \times 5 \times 3$) "celler" i dette tredimensionale[5] *matematikuddannelsernes problemrum*. At vi som analytisk værktøj vælger at udspænde et sådant problemrum, skal ikke tages som udtryk for, at vi mener, man kan eller skal anskue hver celle for sig. Det gælder hverken analytisk eller praktisk. Dertil er de situationer og omstændigheder, som forefindes rundt omkring i systemet, alt for sammensatte. Men tankestrukturen kan hjælpe med til at komme hele problemfeltet rundt og på den måde *opdage* problemer oplevet lokalt, hvis rækkevidde så efterfølgende kan analyseres. Desuden kan struktureringen modvirke en fristelse til at forblive på et så generelt beskrivelsesniveau, at ingen rigtig oplever, at beskrivelsen vedrører dem. Vi har selvsagt bestræbt os på at være opmærksomme på begge forhold både her i forbindelse med problemafklaringen og i rapportens analyser i øvrigt.

Mat.udd. problemrum

10.2 Begrundelsesproblemer

Årsager og begrundelser

Ved en *årsag* til at udbyde matematikholdig uddannelse til studerende inden for et område af uddannelsessystemet forstår vi en drivende kraft, der *i realiteten* har motiveret og givet anledning til eksistensen af matematikholdig undervisning inden for dette område. Ved en *begrundelse* for at udbyde matematikholdig uddannelse forstår vi det at bringe argumenter i spil til støtte for eksistensen af denne uddannelse. I praksis vil sådanne begrundelser ofte afspejle en eller flere årsager til, at der faktisk eksisterer matematikundervisning, men dette behøver ikke at være tilfældet.[6] Når vi nedenfor analyserer begrundelsesproblemer, betyder det således, at vi ser på, hvorvidt – og, i bekræftende fald, under hvilke former – en given matematikholdig uddannelse skal eksistere, og de argumenter og problemstillinger der kan fremføres i den forbindelse.

Tre typer af årsager

Som led i opstillingen af en brugbar ramme for vores karakteristik af aktuelle problemer, der knytter an til sådanne årsager, konkluderer Niss (1996, p. 13), at der grundliggende er tale om kun tre typer af *årsager* til matematikuddannelse, der dækker hele den internationale scene:

Den økonomisk-teknologiske årsag

- At bidrage til den teknologiske og socio-økonomiske udvikling af samfundet som helhed (herefter kaldet den økonomisk-teknologiske årsag).

Den individ-orienterede årsag

- At udstyre individer med værktøjer, kvalifikationer og kompetencer til at hjælpe dem med at klare livets (ud)fordringer (herefter kaldet den individ-orienterede årsag).

[5] De tre dimensioner "uddannelsestype", "interessegruppe" og "problemtype" sætter fokus på hhv. hvor, hvem og hvad i forbindelse med matematikdidaktiske analyser, ikke at forveksle med hvorfor-hvad-hvordan-sondringen, som vedrører matematikundervisningen per se.

[6] Jævnfør omtalen i Niss (1996, p. 12f).

- At bidrage til samfundets politiske, ideologiske og kulturelle vedligeholdelse og udvikling (herefter kaldet den politisk-kulturelle årsag).[7]

Den politisk-kulturelle årsag

Når disse årsagskategorier er relevante skyldes det, at mange begrundelsesproblemer i det væsentlige udspringer af at fokusere på en af de tre kategorier. Det gælder også de tre problemstillinger, vi nedenfor har valgt at fremhæve.

10.2.1 Skævvridning af arbejdsstyrkens kvalifikationer

Igennem de sidste 50 år har en central *begrundelse* for eksistensen af matematikundervisning fra aftagerside været, at en matematisk (og teknisk-naturvidenskabeligt) veluddannet befolkning var og er en forudsætning for først etableringen, og siden opretholdelsen, af velfærdsstaterne i de fleste vesteuropæiske lande.[8] Begrundelsen rummer to aspekter; et der refererer til den økonomisk/teknologiske årsag, og et der refererer til den individorienterede årsag. Den sidstnævnte, der primært drejer sig om livet som borger i et demokratisk samfund, behandles i afsnit 10.2.3. Rationalet bag den økonomisk-teknologiske begrundelse er i korte træk som følger:

Behov for en mat. veludd. befolkning

Lokomotivet foran etableringen af den danske velfærdsstat[9] i 50'erne og 60'erne var en stigende økonomisk vækst. Som det tydeligt fremgår af den politiske debat i disse år, regnes en sådan vækst også for en forudsætning for dens opretholdelse, i hvert fald i de ledende lag i samfundet. Et stort og voksende bruttonationalprodukt er den bedste måde at sikre, at staten kan opretholde et højt aktivitetsniveau. I den forbindelse har der i nyere tid været bred politisk enighed om, at store *mængder* arbejdskraft ikke i sig selv er svaret, men at arbejdskraftens *vidensniveau* er nok så væsentlig. Et afgørende kvalifikationskrav er således evnen til at udvikle og udnytte produktionsforhold, der muliggør øget produktivitet. Det svarer til et optimistisk

[7]Denne kategorisering kan ses som en uddybning af en klassisk og mere overordnet tilgang. Ifølge denne er uddannelsessystemets rolle i samfundet dels at indføre eleverne i samfundets mangeartede facetter og tænkemåder, altså indførelsen i samfundets særegne kultur, og dels at udstyre dem med teknikker og metoder, som er nødvendige for at kunne klare sig og deltage i samfundets funktioner, fx det at kunne skrive, læse og regne. De to roller kaldes hhv. *den socialiserende og kvalificerende rolle*. Med denne forståelse er de politisk/kulturelle årsager udtryk for et ønske om socialisering, mens de økonomisk/teknologiske og individorienterede årsager er udtryk for et ønske om kvalificering. For analyser med et dansk perspektiv: se endvidere fx Christiansen (1989), der handler om den gymnasiale matematikundervisning, Jensen & Kyndlev (1994), der er righoldig på kildehenvisninger om samme, samt Undervisningsministeriet (1978) og Undervisnings- og forskningsministeriet (1990), der er redegørelser omhandlende mange niveauer.

[8]Se evt. Gregersen & Jensen (1998) for en fyldigere historisk gennemgang af argumenterne end den, der gives her.

[9]Begrebet *velfærdsstat* bruges for samfund, hvis indretning bl.a. er karakteriseret ved høj grad af social sikkerhed, dvs. samfund hvor den sociale stratifikation (lagdeling) nok eksisterer, men er *relativt* lav. Nogle bruger betegnelsen *socialstat* om samme type. En velfærdsstat er karakteriseret ved, at befolkningens velfærd er et formuleret mål i den offentlige politik, og hvor staten træffer aktive tiltag for at nå dette mål. En velfærdsstat er altså en *aktiv* stat, der *intervenerer* i de frie markedskræfters spil med henblik på omfordeling af ressourcerne.

teknologibegreb, der opfatter teknologien som "en størrelse mennesket indskyder mellem sig og naturen" for bedre at kunne få magt over den og nyttiggøre den.[10]

Mat.kundskaber og teknologi

I den sammenhæng kommer matematiske kundskaber – og dermed den undervisning der skal frembringe dem – på banen som central aktør af to grunde: For det første fordi sådanne kundskaber ofte er nødvendige for at kunne udnytte teknologi i traditionel forstand. For det andet fordi matematik gennem matematiske modeller selv udgør en sådan teknologi. Hermed er det ræsonnement, der fra en aftagervinkel begrunder matematikundervisningens så fremskudte placering, tilendebragt: Uddannelsespolitikken med matematikundervisningen i en frontrolle er, via arbejdsmarkedspolitikken, helt central for velfærdsstatens opretholdelse og videreudvikling. Altså på sin vis en politisk-kulturel begrundelse, som fører en økonomisk-teknologisk begrundelse med sig.

Utilstrækkelig søgning til mat.holdige udd.

På denne baggrund er det et problem, når eleverne ikke i tilstrækkelig grad vælger de former for uddannelse, som samfundet gerne vil have dem til. Der er en generel tendens til, at søgningen til de forskellige videregående studier udviser negativ korrelation med den vægt, matematisk indsigt og kunnen deklareres at have på de respektive studier. Flere undersøgelser (fx Simonsen & Ulriksen; 1998) peger på, at et af de afgørende kriterier ved valg af studieretning for mange mennesker er, at studierne kan bidrage til deres løbende selvrealiseringsprojekt, som de oplever, at en stadig mere kompleks verden nødvendiggør. Her kan matematikholdige uddannelser let komme i klemme.

De mulige kilder til dette problem kan befinde sig flere steder, fx i selve matematikken som fagområde, eller i det forhold, at matematikholdige uddannelser traditionelt stiller betragtelige arbejdsmæssige, psykologiske og andre krav til eleverne. Vi skal afstå fra at gå i dybden med dette spørgsmål i denne sammenhæng.

Søgningen til nogle af ingeniøruddannelserne er faldet kraftigt de senere år, medens flere af de andre matematiske professionsuddannelser ikke er direkte svækket – men der er på den anden side ikke indtruffet en vækst, der modsvarer samfundets efterspørgsel.

Et ubehageligt dilemma

På de matematikforbrugende uddannelser står uddannelsesplanlæggerne i et ubehageligt dilemma: Som konsekvens af ovennævnte negative korrelation kan de enten melde ærligt ud, hvilket matematikforbrug der er tale om, og tilrettelægge studiet derefter, hvilket let fører til, at uddannelsen sættes i bås med de matematiske professionsuddannelser. Eller man kan for at øge ansøgningstallet nedtone matematikindholdet, og så forsøge *ad hoc* at råde bod på de skævheder i ansøgernes kompetencemønster, der følger i kølvandet på den beslutning.

Begge dele fører til den skævvridning af arbejdsstyrkens kvalifikationer, som nævnes i overskriften. Der er – set fra aftagerside – simpelthen for få, der stiller sig positivt til en matematikholdig uddannelse.

[10] Se Jensen & Skovsmose (1986).

10.2.2 Relevansparadokset og motivationsproblemet

Mat.kundskabers objektive relevans

På den ene side tillægges matematikkundskaber (og matematikundervisning til at frembringe dem) altså væsentlig betydning i alle samfund af vores type. Man kan konstatere, at det af samfundsmæssige grunde er *objektivt relevant*, at "nogle" besidder sådanne kundskaber. I løbet af det seneste århundrede er tendensen gået i retning af, at "nogle" skal forstås som "stadig flere", og i den sidste fjerdel af det 20. århundrede simpelthen som "alle".[11]

Subjektiv irrelevans

På den anden side er der mangfoldige vidnesbyrd fra alle lande og alle undervisningstrin om, at betragtelige grupper af elever i uddannelsessystemet har svært ved at se den *subjektive relevans* af den matematikundervisning, de modtager, og af i det hele taget at beskæftige sig med matematik. Det kan der være flere forklaringer på. En mulighed er, at det er, fordi eleverne ikke får adgang til at stifte bekendtskab med den objektive relevans af matematikkundskaber, eller fordi de på trods heraf ikke føler sig overbevist om den. En anden mulighed er, at eleverne faktisk er overbevist om denne relevans på det samfundsmæssige plan, men uanset dette ikke føler matematikkundskaber personligt nyttige eller vedkommende i forhold til deres forestillinger om fremtidig karriere og tilværelse. På individplanet kan det for nogle give sig udtryk i en opfattelse, der i slagordsform kan formuleres således: "Jeg ved godt, at jeg ikke kan bruges til noget uden matematik; alligevel kan jeg ikke bruge matematik til noget."

I begge tilfælde skaber modsætningen mellem den objektivt foreliggende relevans og den subjektivt oplevede irrelevans et paradoks, det såkaldte *relevansparadoks*.

Relevansparadokset

Hvis relevansparadokset angår tilstrækkeligt store grupper af elever, bliver det til et samfundsproblem og dermed til en udfordring, som uddannelsessystemet i almindelighed og matematikundervisningen i særdeleshed må gøre, hvad de kan for at tackle. Meget tyder på, at et sådant samfundsproblem i disse år eksisterer både internationalt og i Danmark.

Relevansparadokset ytrer sig ikke blot på samfunds- og individniveau, men også på institutionsniveau. I folke- og gymnasieskoler, såvel som på videregående uddannelsesinstitutioner, ses der at være problemer med at bringe matematikfaget i spil i sammenhæng med andre fag. Ofte har lærere i andre fag, men ikke sjældent også matematiklærere, vanskeligt ved at se, hvad matematikken gør godt for, enten på institutionen som helhed eller over for netop disse andre fag. Dette på trods af, at flere og flere fag rummer matematikholdige ingredienser i stigende stigende omfang, omend den matematiske karakter af ingredienserne ikke altid erkendes, fx på grund af sprogbrug eller begrebsapparat. Denne manifestation af relevansparadokset giver sig udslag i et *isolationsproblem*, som både er til skade for matematikun-

Isolationsproblemet

[11] Ved at sige at praktisk taget alle i samfundet bør bringes til at besidde en eller anden form for matematikkundskaber, har man ikke sagt noget om, *hvilke slags* matematikkundskaber forskellige kategorier af samfundsmedlemmer bør udstyres med, og hvordan de skal erhverve dem. Det er jo et spørgsmål, som er søgt behandlet tidligere i denne rapport.

dervisningen og for de fag, som kunne have udbytte af en bevidst inddragelse af matematiske komponenter i deres virksomhed.

Det kan også være, at eleverne nok er blevet overbevist om relevansen af at erhverve sig matematikkundskaber, fx i forhold til de uddannelses- og karriereplaner de har, og derved for så vidt også finder beskæftigelsen med matematik med henblik på at opnå disse kundskaber subjektivt relevant, men at de ikke desto mindre finder arbejdet med matematik kedeligt, menings- eller perspektivløst, uvedkommende, eller måske simpelthen for krævende i forhold til det forventede eller opnåede udbytte. I denne situation foreligger der sådan set ikke noget relevansparadoks, men der foreligger et væsentligt *motivationsproblem*, som – hvis det har et markant omfang (og også det synes at være tilfældet i disse år, i det mindste på nogle uddannelsestrin) – kan være lige så alvorligt for bestræbelserne på at udstyre befolkningen med funktionelle matematikkundskaber som relevansparadokset. Sat skarpt op kan man sige, at hvis ikke matematikundervisningen er i stand til at frembringe et mindstemål af begejstring for faget hos modtagerne, kommer selv de bedst begrundede, gennemtænkte og tilrettelagte undervisningsplaner til kort.

Motivationsproblemet

Det er arbejdsgruppens opfattelse, at både relevansparadokset (inklusive dets manifestation som et isolationsproblem) og motivationsproblemet er til stede i en grad, som skaber betydelige udfordringer for indretningen og gennemførelsen af en vellykket og udbytterig matematikundervisning.

Relevansparadokset og motivationsproblemet skaber udfordringer

10.2.3 En mulig trussel mod "matematik for alle"?

Som tidligere nævnt har politikere og andre beslutningstagere, den almindelige offentlighed og matematikundervisningsmiljøer i alle lande, i løbet af det 20. århundrede vænnet sig til at tage det for givet, at matematikkundskaber og matematikundervisning tillægges stor og voksende betydning på alle uddannelsestrin. Mange lande har investeret store ressourcer og anstrengelser i at oprette matematikundervisning på steder, hvor den ikke tidligere fandtes, og i at konsolidere og udbygge den på steder, hvor den allerede eksisterede. På den måde har matematikundervisning fundet vej til nye kategorier af modtagere, som ikke tidligere fik adgang til en sådan. Det er ikke en overdrivelse internationalt set at karakterisere hovedstrømningen i matematikundervisningen i den anden halvdel af det 20. århundrede som en udvikling hen imod "matematik for alle". Som det også blev antydet i afsnit 10.2.1 har alle lande – både industrialiserede lande i øst og vest og i den tredje verden – været overbeviste om, at deres borgeres matematikkundskaber er af afgørende betydning for den vellykkede funktion og videreudvikling af samfundet i form af teknologisk, socio-økonomisk og kulturel velfærd. Jo mere matematisk kompetent den almene befolkning i et land er, jo bedre ville dette land være stillet i henseende til materiel og immateriel velstand og vækst, sagde doktrinen.

Hidtil: Fokus på "matematik for alle"

Med andre ord, mens matematikundervisning (ud over elementær regning) før omkring 1960 udelukkende blev et ret begrænset udsnit af befolkningen til del, var matematikundervisningen ved slutningen af det 20. århundrede udbygget til at henvende sig til mange grupper af elever, som ikke ville have valgt den af egen drift, dvs. såfremt personlig tilbøjelighed og interesse på valgtidspunktet var det eneste som talte.

Tegn på kursskift

Globalt set tyder meget på, at det ikke længere kan regnes for en selvfølge, at samfundet vedblivende vil betragte matematikundervisning for alle som noget særdeles væsentligt, der løbende skal udvikles og udbygges.

I Japan er det for nyligt blevet besluttet at reducere omfanget af den almene matematikundervisning i skolen betragteligt. For et par år siden udspandt der sig – under overskriften "Sieben Jahre sind genug" – i Tyskland en voldsom debat om, hvor megen matematik den enkelte i virkeligheden havde brug for at tilegne sig.[12] I Norge og Sverige høres røster fra almenpædagogisk hold, der slår til lyd for en væsentlig reduktion eller ligefrem fjernelse af matematikken i den almene skole. I Danmark fremsættes fra Gymnasieskolernes Lærerforening forslag om, at matematik ikke skal være obligatorisk (fælles)fag i HF. I dagspressen offentliggøres fra tid til anden artikler, som taler for en drastisk nedtoning af matematikundervisning for almindelige elever. Et eksempel på det er en artikel i *Politiken* den 24.10. 2001 af teknisk direktør Rasmus Wiuff (medlem af Teknisk Uddannelsesråd), som bl.a. skriver, at "matematik alt for længe har fået lov til at stå urørt som en indiskutabel nødvendighed, både på de videregående uddannelser, i gymnasiet og i folkeskolen." Dette er blot enkelteksempler, men grundlæggende træk ved de moderne samfunds indretning og virkemåde peger på, at disse eksempler måske ikke er så tilfældige, men led i mere dybtliggende processer. Vi skal forsøge at fremdrage nogle af disse træk.

Mat.s konkrete nytte er svært dokumenterbar

For det første er det, i vore dages komplekse samfund, ikke så lige til at levere en direkte og konkret påvisning af, nøjagtigt hvilke matematiske kundskaber som er nødvendige for at begå sig i forskellige livssfærer og samfundssektorer. Derfor kan det, jf. relevansparadokset, være nok så vanskeligt at forbinde de ting, som er på dagsordenen i matematikundervisningen med forhold af samfundsmæssig relevans, i det mindste for det flertal af befolkningen som ikke skal arbejde i markant matematikforbrugende professioner. Hvis det, siges det af nogle, vedvarende viser sig vanskeligt at demonstrere den umiddelbare relevans af skole- eller universitetsmatematiske kundskaber for verden uden for undervisningslokalerne, *er* matematik måske slet ikke så vigtig for flertallet.[13]

For mange får for ringe udbytte

For det andet må det indrømmes, at der trods betydelige indsatser i undervisningsudvikling og -forskning er grænser for, hvor godt det i de fleste lande er lykkedes at bibringe det store flertal af elever i uddannelsessystemet så solide, overbevisende og brugbare matematikkundskaber, som det var tilsigtet. For mange mod-

[12]Debatten, som blev ført både i aviser og tidsskrifter, blev ansporet af en afhandling af Hans Werner Heymann (Heymann; 1996).

[13]Se fx The National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century (2000), som er en rapport fra et amerikansk kommissionsarbejde.

tagere af matematikundervisning får et for ringe udbytte af den. Ville det så ikke være mere rationelt og humant at koncentrere bestræbelserne om at undervise dem, som virkelig kan få noget ud af undervisningen? Måske ville der, ved at reservere substantiel matematikundervisning for sådanne elever, skabes et højere udbytte af uddannelsesinvesteringerne end ved at fastholde "matematik for alle" som den bærende opgave. Ikke mindst mange matematiklærere og andre matematikere rundt om i verden er begyndt at fremføre sådanne synspunkter, blandt andet i frustration over ikke at have tilstrækkelige muligheder for at gøre noget effektivt for den sidstnævnte gruppe.

it som erstatning

For det tredje ser det ud til, at en stor del af den viden og de færdigheder, som traditionelt har været hjørnesten i matematikundervisningen på forskellige niveauer, nu kan varetages hurtigere og sikrere ved hjælp af IT, der tillige kan håndtere opgaver, som var helt utilgængelige i de tider, hvor matematikundervisningen brugte mange kræfter på at uddanne "den menneskelige regnemaskine". Ville det så ikke, lyder tankegangen i fortsættelse af den foregående, være meget mere effektivt at fokusere samfundets uddannelsesindsats på at sætte folk i almindelighed i stand til, på kompetent og fleksibel vis, at omgås IT, også når det gælder matematik, i stedet for at spendere betydelige ressourcer på at gennemføre matematikundervisning for store grupper af elever, som ikke har så let ved at lære det? Selvfølgelig har samfundet stadig brug for en hel del mennesker, som virkelig kender og behersker en stor mængde matematik på en dybtgående måde. Men denne gruppe vil ikke desto mindre være af relativt beskeden størrelse, og antagelig langt lettere at undervise end flertallet.

Generel nedskæring af forskning og uv.

En understregning af denne tendens ses i det forhold, at mange lande har iværksat opbremsning af de udgifter til undervisning (og forskning), som ikke giver et åbenbart og umiddelbart udbytte. Nedskæringer af et system fører let til svigtende entusiasme og demoralisering, og dermed fremkomsten af fejlfunktioner og ineffektivitet. Dette fører til krav om yderligere rationalisering (trimning og omorganisering) af systemet, der ender med, i bred ligegyldighed, at koncentrere sine indsatser om de mindre tunge problemer. I uddannelsessystemet fører det mange steder til, at kræfterne sættes ind over for de dygtigere elever, som kan klare sig godt og gøre fremskridt uden alt for megen assistance, mens de elever, som har brug for mere hjælp, negligeres eller lades tilbage.

Koncentration om "de lette" problemer

Tendenserne er nået Danmark

Der er mange grunde til at tro, at tendenser, som de beskrevne, også vil vinde fodfæste i Danmark med større styrke, end tilfældet er i dag. Vi påstår ikke, at dette vil ske meget hurtigt, eller at disse tendenser vil blive de dominerende i de nærmeste år. Alligevel finder vi det nødvendigt at bruge kræfter på at overveje problemstillingen nøje. Hvis overvejelserne munder ud i, at disse tendenser bør have medvind, vil det føre til en væsentlig forandring af såvel rammerne og perspektiverne for matematikundervisningen på alle trin, som af den nærmere udformning og gennemførelse af den. Hvis konklusionen derimod bliver, at tendenserne bør modarbejdes, er det nødvendigt at udtænke og iværksætte mere effektive strategier til formålet end dem, der synes at være til rådighed for øjeblikket. Om det ene eller det andet er situationen, må komme an på en nærmere analyse. I alle tilfælde repræsenterer den latente trussel mod "matematik for alle" en væsentlig udfordring for dette projekt og for dansk matematikundervisning fra top til bund. Vi vil dog ikke undlade at markere, at vi – om ikke andet så af hensyn til et ønske om at fremme befolkningens demokratiske kompetence – anser det for væsentligt at fastholde "matematik for alle" som en central opgave for dansk matematikundervisning. Hvordan denne opgave så nærmere skal fortolkes og løses, er en anden sag.

10.3 Implementationsproblemer

Afstand mellem det tilsigtede og det realiserede

Der er en afstand mellem det mulige og det realiserede udbytte af de forskellige slags matematikholdige uddannelser. Uden for en utopisk forestillingsverden vil det selvfølgelig altid være tilfældet, men for nogle af eleverne er afstanden større, end rimeligt er, og der er for få, der på et givet uddannelsestrin når op på det højest mulige niveau.

Denne karakteristik udgør det fælles element for alt, hvad vi vil betegne implementationsproblemer. Sådanne problemer er uundgåeligt forbundet med forestillinger om det tilsigtede indhold på en given uddannelse, og begrundelser for måden dette indhold bringes i spil på, men det er oplevelsen af, at "det virker ikke (godt nok)", der er i fokus her. Alle de forhold, der omtales nedenfor, kan ses som forsøg på gensidigt supplerende forklaringer på, at denne oplevelse eksisterer forskellige steder i uddannelsessystemet.

10.3.1 Problemer med lærernes kvalifikationer

Som det fremgår af kapitel 6 om matematiklæreres kompetencer, er det at være en god matematiklærer en kompleks udfordring, som mange undervisere på alle niveauer møder på fortræffelig vis og oplever som både spændende og personligt meningsgivende. Da der alene i Danmark er et femcifret antal mennesker, som i deres daglige beskæftigelse stilles overfor denne udfordring, er det trivielt, at der også er nogle, der ikke til fulde magter udfordringen. Det kan den enkelte og de miljøer, han/hun er en del af, opleve som problematisk og forsøge at gøre noget ved, men eksistensen af mindre gode matematiklærere er noget, uddannelsessystemet til enhver tid må leve med. Er antallet begrænset, udgør eksistensen af sådanne lærere ikke i sig selv et samfundsmæssigt problem.

Stor variation i lærerkvalifikationer

Det problematiske består – som vi ser det – i, at det desværre er en ikke forsvindende andel af matematiklærerne på de forskellige niveauer, som ikke i tilfredsstillende grad magter udfordringen, og at der er tegn på, at det et stykke hen ad vejen skyldes mangler i den vifte af kompetencer, som man efter vores mening skal være i besiddelse af for at kunne levere god matematikundervisning. At der så ydermere

Nogle magter ikke udfordringen

kan spores en vis systematik – se nedenfor – i typen af kompetencer, som matematiklærerne på de forskellige uddannelsesmæssige niveauer synes at mangle, er på sin vis foruroligende, men giver også begrundet håb om, at der er tale om et problem, som ad politisk og tilrettelæggelsesmæssig vej kan afhjælpes.

Vi vil i et senere afsnit fremsætte nogle konkrete bud på, hvilke initiativer det i den forbindelse vil være ønskeligt at iværksætte. På dette sted vil vi resumere nogle af de betragtninger om den gode matematiklærer, som blev fremsat i kapitlet om matematiklærere, for herigennem at kunne pege på, hvori det systematiske i problemets karakter ligger.

Den gode matematiklærer

Den gode matematiklærer er fagdidaktisk reflekteret

På den teoretiske front skal den gode matematiklærer være *fagdidaktisk reflekteret*, hvilket vi bruger som samlende betegnelse for det at være i stand til – og se det som en naturlig del af lærerprofessionen – i et fagligt perspektiv at reflektere over de tre klasser af grundlæggende didaktiske spørgsmål og, nok så vigtigt, deres indbyrdes sammenhæng, jf. afsnit 10.1: *Hvorfor* iværksættes den foreliggende matematikholdige undervisning – hvad er den objektive samfundsmæssige begrundelse, og i hvilken udstrækning kan jeg identificere mig med den? *Hvad* er det, eleverne gerne skal lære ved at deltage i undervisningen, og hvilke kompetencer skal de udvikle herigennem, lige fra de helt overordnede alment pædagogiske og metafaglige aspekter til de helt konkrete færdigheder? *Hvordan* kan jeg bedst bidrage til, at eleverne udvikler de ønskede kompetencer, og lærer det de skal – hvad er de optimale "vækstbetingelser" i den foreliggende situation, og hvilke vanskeligheder og forhindringer skal jeg være opmærksom på? Det er værd atter at pointere, at hvis man skal kunne reflektere over spørgsmål som disse på kvalificeret vis, er det hverken tilstrækkeligt at være fagligt eller alment didaktisk reflekteret.

Den gode lærer kan "brænde igennem" til eleverne

Hvad angår den praktiske del af professionen, skal den gode lærer selvfølgelig være i stand til at "brænde igennem", at "nå ud over katederet" til eleverne. Om man er i stand til det, er i første række et spørgsmål om den enkeltes personlige karaktertræk, stil og livserfaring, og kun i anden række om skoling i betydningen "systematisk tillærte kompetencer og pædagogiske teknikker". Der, hvor skoling potentielt spiller en central rolle, er, når det handler om, hvorvidt den enkelte lærer er i stand til at få sin praktiske formåen og sin fagdidaktiske indsigt til at spille konstruktivt sammen og på den måde udgøre en helhed, hvilket vi opfatter som en afgørende del af karakteristikken.[14]

Idealtypen på *den gode matematiklærer* vil vi således karakterisere som en fagdidaktisk reflekteret person, der er i stand til at praktisere på dette grundlag, og som anerkender og konstant er i dialog med sig selv (og andre) om det komplementære

[14] Vigtigheden af dette samspil er godt beskrevet af Ramsden (1999, p. 139ff.), som bruger det til at udskille den foretrukne af tre sammenholdte teorier om undervisning. Udgangspunktet er opfattelsen blandt universitetslærere, men det er ikke afgørende for analysen på de anførte sider.

forhold mellem den fagdidaktisk reflekterende og den praktiserende side af god undervisning.

Malet med den brede pensel mener vi med dette udgangspunkt at kunne se følgende generelle mønster:

Folkeskolen

I folkeskolen – eller mere generelt på de uddannelser, hvor autorisation som lærer forudsætter en seminarie-uddannelse – kan man ikke tage matematiklærernes nære forhold til matematikkens substans for givet, alene af den grund at ganske mange praktiserende matematiklærere ikke virker på baggrund af en fagligt-pædagogisk uddannelse i faget. Til gengæld er de fleste gode praktikere, bl.a. fordi de i almindelighed holder af at undervise og på anden måde opdrage børn og unge. Som hovedregel foregår praktiseringen i et kvalificeret samspil med refleksioner over generelle problemstillinger af hvordan-karakter, der som det mest karakteristiske indebærer en fokusering på tilrettelæggelse af aktiviteter, der danner grundlag for læring i en meget spredt elevgruppe.

Fokus på praksis og metodik: "hvordan?"

Problemet er, at den store optagethed af og viden om generelle metodemæssige diskussioner og problemstilllinger ofte sker på bekostning af *fagdidaktiske* refleksioner af begrundelses-, indholds- og læringsmæssig art, bedømt ud fra de diskussioner, der føres. Når begrundelses-, indholds- og læringsmæssige refleksioner ind imellem bringes på banen, er det overordnede fagdidaktiske perspektiv ofte så godt som fraværende: Begrundelsesdiskussionerne foregår på et alment pædagogisk grundlag med henvisning til undervisningens generelle opdragelsesmæssige aspekter, refleksioner over undervisningens indhold foregår fragmenteret og forbliver ved den meget praksisnære overvejelse om, hvad der i forhold til enkeltstående begreber og færdigheder kan lade sig gøre, mens læringsdiskussioner forbliver på et generelt niveau, som alle i lærergruppen uanset faglig baggrund kan deltage i på lige fod.

Mindre vægt på fagdidaktiske refleksioner

De gymnasiale uddannelser og de højere læreanstalter

På de gymnasiale uddannelser og de højere læreanstalter – eller mere generelt på de uddannelser, hvor autorisation som lærer forudsætter en kandidatuddannelse – kan man ikke tage matematiklærernes kærlighed til selve det at undervise i matematik for givet. Heraf følger ikke, at der ikke er mange gode praktikere blandt dem, blot at udgangspunktet for mange er en fascination af, og interesse for, *faget* matematik, snarere end for det didaktiske problemfelt. For andre er matematik et sekundært fag i forhold til deres hovedfag, som måske ikke har den mindste forbindelse til matematik eller naturvidenskab. Nogle lærere har valgt at studere matematik som et karrierefremmende middel, snarere end som et fag med egne attraktioner. I begge tilfælde bliver perspektivet på arbejdet som matematiklærer

Fokus på det faglige, især på "hvad?"

domineret af indholdsmæssige refleksioner ("hvad-problemer"), primært med fokus på internt faglige problemstillinger, som de fleste lærere på disse uddannelsestrin føler at kunne forholde sig til på et godt grundlag. Lærerens undervisning og faglige overblik står som det centrale omdrejningspunkt.

Mindre interesse for bredere perspektiver på faget

I forhold til karakteristikken af den gode matematiklærer er problemet på gymnasieområdet, at de internt faglige indholdsmæssige problemstillinger, som flittigt vendes og drejes (debatten i lærerforeningsudgivelsen LMFK-bladet er en god indikator), kommer til at fylde så meget, at det skygger for en diskussion med flere nuancer. Interessen i for alvor at inddrage begrundelses- og implementationsmæssige refleksioner kan – hvad enten det drejer sig om problemstillinger med udgangspunkt heri eller om at anlægge et lidt bredere metafagligt perspektiv på indholdsmæssige problemstillinger – ofte ligge på et lille sted, hvilket kan tænkes langt hen ad vejen at hænge sammen med, at de matematiklærere, vi her taler om, føler sig mindre kompetente på disse områder i sammenligning med deres, i mange tilfælde, solide internt faglige kundskaber.

Sammenfatning

"Metodefetichering" vs. "fagfetichering"

Sammenfattende, om end uden tvivl forenklende, synes der således at være to forskellige – og til dels modsatrettede – problemer i forhold til kvalifikationsmønsteret blandt matematiklærerne på de forskellige typer uddannelser: Et *metodefeticheringsproblem*, som, sat på spidsen, består i at opmærksomhed på elevernes mulighed for læring gennem aktivitet ophøjes til det, som alle andre problemstillinger roterer omkring, og et tilsvarende *fagfeticheringsproblem*, som består i at tilskrive lærerens opmærksomhed på videnskabsfaget matematik denne status. De to vidt forskellige matematiklærerkulturer, som følger af, at de to problemer eksisterer samtidig forskellige steder i det danske uddannelsessystem, rummer nok en ikke uvæsentlig del af forklaringen på mange af de øvrige implementationsproblemer, som omtales nedenfor.

10.3.2 Sammenhængs-, overgangs- og progressionsproblemer

Sammenhængs-, overgangs- og progressionsproblemer udgør et kompleks

Blandt de problemer og udfordringer, som har ført til oprettelsen af KOM-projektet og nedsættelsen af arbejdsgruppen, er der flere, som er indbyrdes forbundne i en grad, som nærmest får dem til at udgøre et kompleks. For nemheds skyld kalder vi dem alle problemer, selv om de oftest tager form af udfordringer. Den ene type angår *sammenhæng* i den matematikundervisning og -tilegnelse, som finder sted i de forskellige lag i uddannelsessystemet. Den anden type problemer angår *overgangen* mellem uddannelsesformer og -niveauer, fx fra folkeskole til gymnasium, eller fra gymnasium til videregående uddannelse. Den tredje og sidste type problemer angår *progressionen* i matematiktilegnelsen – herunder vækst af viden, kundskaber og færdigheder – op igennem uddannelsessystemet, både på langs ad uddannelsesniveauerne og inden for det enkelte niveau.

Sammenhængsproblemer

Forskellige opfattelser af faget på forskellige trin

Det er en ofte gjort observation, at forskellige uddannelsesformer og institutionstyper opretholder forskellige opfattelser af, hvad faget matematik er og går ud på, af hvad matematikundskaber består i, og hvordan de erhverves, og af hvordan matematikundervisningen derfor bør bedrives. Hårdt optrukket ser vi følgende generelle mønster: I folkeskolen og på seminarierne lægges ofte stor vægt på begrebsopbygning og forståelse gennem udforskende og afsøgende elevaktiviteter inden for uformelle disciplinrammer og mindre på fx indøvelse af færdigheder og – for folkeskolens vedkommende – formel symbolbehandling. I det almene gymnasium lægges ofte vægt på begrebsopbygning og forståelse gennem opgaveregning med tyngdepunkt i netop symbolbehandling, og i erhvervsgymnasierne betones navnlig anvendelsen af begreber og metoder i andre fag- og praksisområder. I universiteternes matematikundervisning (også i hjælpefagsundervisning) fokuseres derimod ofte på stringent teoriopbygning og matematisk bevisførelse.

Fravær af en fælles opgave

Manglende sammenhæng

Problemet heri er ikke så meget selve forskelligheden i de forskellige uddannelsesformers betoninger af, hvad der er det væsentlige i matematik, som jo kan være velbegrundede nok (de har jo ikke identiske opgaver eller vilkår), men at disse forskelle af lærere og elever kan opfattes som næsten modsatrettede. Det opleves af mange aktører sådan, at uddannelsesniveauerne ikke er fælles om den opgave at lære eleverne matematik, men håndhæver så forskellige opfattelser og traditioner på feltet, at man i stedet for at bidrage til at løse den samme opgave fra forskellige sider og synsvinkler næsten kommer til at spænde ben for hinandens virksomhed. For mange elever opleves det som om, de på et nyt uddannelsestrin pludselig skal til at foretage sig noget helt andet end det, der var på dagsordenen tidligere, og at det, der før var uvigtigt, nu pludselig er blevet vigtigt, og omvendt. Det er imidlertid væsentligt at holde sig for øje, at sammenhængsproblemet ikke i sig selv er et overgangsproblem (se nedenfor), selv om det måske nok i særlig grad kommer til syne ved overgangen fra en uddannelsesform til en anden, men først og fremmest er et spørgsmål om *forskelle* mellem disse former.

Fare for "dem-og-os" syndromer

Undertiden er holdnings-, traditions- og kulturforskellene mellem uddannelsesniveauerne så store, at der opstår gensidig mangel på respekt for de andres arbejde og institutioner. Problemer på et trin henføres gerne til at være det umiddelbart foregående (eller efterfølgende) trins "skyld", idet man der lægger vægt og bruger kræfter på "det forkerte", har for svage forudsætninger osv., sådan at man fx ikke "leverer en ordentlig vare", respektive har helt urealistiske forventninger. Når sådanne "dem-og-os" syndromer skabes og udvikles, ledsages de ofte af manglende lyst og vilje til at orientere sig ordentligt om betingelser og realiteter i de andres verden, og i stedet for indsigtsbaserede billeder og beskrivelser af denne verden udvikles karikaturer og vrængbilleder, som bidrager til at forøge afstanden mellem miljøerne.

I sagens natur er det vanskeligt at få overblik over, i hvilken grad der faktisk hersker forhold som skitseret overfor. At der er noget om snakken, er imidlertid uomtvisteligt. Og i det omfang det er tilfældet, er det klart, at et resultat let kan blive forvirring og manglende sammenhæng og konsistens i den enkelte elevs matematikopfattelse, og sandsynligvis dermed også i deres matematikkundskaber. Fra KOM-projektets perspektiv vil det at benytte fælles sæt af matematiske kompetencer, som de her foreslåede, som et hovedmiddel i beskrivelsen og tilrettelæggelsen af undervisningen på alle trin, være et første – stort – skridt på vejen til at gøre noget ved sammenhængsproblemet.

Komp. kan bygge bro

Overgangsproblemer

Denne type problemer vedrører de vanskeligheder i form af faglig diskontinuitet, faglige tilpasnings- og tilrettelæggelsesproblemer, og dermed forbundet elev- og lærerusikkerhed, som opstår i forbindelse med elevers overgang fra et uddannelsesniveau til det næste. Det fører videre til spild af mentale og økonomiske ressourcer, og til svækkelse af elevers motivation og interesse for at beskæftige sig med matematikholdige gøremål, samt til tab af tempo og progression i matematiktilegnelsen.

Årsager til problemerne

Årsagerne til overgangsproblemerne ligger dels i selve det, at skiftet fra en institutionsform til en anden, som har andre opgaver, perspektiver og vilkår, i alle fald vil afstedkomme friktion, ikke mindst da elevernes personlige modning samtidig kommer i spil over længere tidsstræk. Men de ligger også i de holdnings-, kultur- og traditionsforskelle uddannelsesniveauerne imellem, som omtaltes ovenfor, både i henseende til uddannelsesniveauerne i almindelighed og i henseende til matematikspecifikke forhold i særdeleshed.

Progressionsproblemer

Utilstrækkelig progression

Denne type problemer går ud på, at en række forskellige aktører, iagttagere og aftagere i tilknytning til dansk matematikundervisning finder, at der sker en for ringe progression i væksten, udviklingen og konsolideringen af den enkelte elevs matematikkundskaber i løbet af hans/hendes vej op igennem uddannelsessystemet. Der tales om, at der både i matematikundervisningen inden for den enkelte uddannelsesform (det kunne fx være folkeskolen eller HF) og på langs ad disse, finder en utilstrækkelig faglig progression sted, dvs. at tingene i for høj grad udspiller sig på det samme niveau, uden at der for alvor vindes nyt land.

En del af problemet hidrører fra de før omtalte forskelle *mellem* uddannelsesformerne, men en anden del vedrører tilstandene *inden for* en given uddannelsesform. I det omfang der måtte ske for ringe progression inden for en given uddannelsesform, kunne årsagerne bl.a. tænkes at ligge i utilstrækkelig opmærksomhed over for behovet for progression, eller i de vilkår og redskaber som er til rådighed for at fremme den.

Komp.betragtninger kan være en hjælp

Progressionsproblemerne er tidligere omtalt i denne rapport. Også her finder vi, at en fokusering på udviklingen af elevernes matematiske kompetencer henover skellene mellem de forskellige uddannelsestrin vil kunne bidrage til at afhjælpe de progressionsproblemer, som ikke først og fremmest skabes af almene uddannelsessociologiske omstændigheder.

10.3.3 Problemer med spredning henover det samme niveau

En problemkreds som er forbundet med, men ikke sammenfaldende med, den ovenfor behandlede, ses ofte fremdraget både fra centralt politisk/administrativt hold, og fra aftagere af elever eller kandidater fra et givet trin af uddannelsessystemet. Det er *spredningen* i, hvad de pågældende har med sig fra den matematikundervisning, de har modtaget. Det, der tænkes på, er bl.a., at gruppen af elever, der forlader et givet uddannelsesafsnit – fx folkeskolens 9. klasse med afgangsprøve i matematik, nyudklækkede studenter med A-niveau fra gymnasiet, nyuddannede folkeskolelærere eller universitetskandidater i matematik – med stor sandsynlighed har været udsat for en mangfoldighed af forskellig slags matematikundervisning inden for det uddannelsesniveau, der er tale om. Det resulterer i store variationer i de matematiske erfaringer, kompetencer og færdigheder dimittenderne har med sig fra et givet trin, på trods af at der principielt og angiveligt er tale om det samme "faglige niveau" henover det pågældende trin. Det gælder ikke mindst på ungdomsuddannelsesområdet, hvor et tilsigtet fagligt niveau ligefrem udstyres med en klassifikation (A-, B- eller C-niveau) på tværs af de forskellige ungdomsuddannelser, skønt det er almindeligt erkendt, at fx et B-niveau dækker over et meget stort felt af forskellige baggrunde, alt efter om det hidrører fra et HF-tilvalgsfag, fra det almene gymnasiums matematiske linje eller fra HHX og HTX.

Spredning i elevernes mat.ske "bagage"

Når disse variationer henover det samme niveau af nogle opleves som problematisk, er det hovedsagelig af to – ret forskellige – grunde.

Deklarationsproblemet

For det første er der tale om et "varedeklarationsproblem", lad os kalde det *deklarationsproblemet*, som fortrinsvis opleves af aftagerne af de forskellige dimittendgrupper. Problemet kunne overfladisk betragtet ligne et overgangsproblem, men er det egentlig ikke. Det er nemlig ikke selve overgangen, der er problemet (selv om det, i lighed med hvad tilfældet var med sammenhængsproblemet, kommer særligt til udtryk ved overgangen mellem uddannelsestrin), men netop den variation der findes inden for en given deklaration.

Spredning fører til et deklarationsproblem

Ungdomsuddannelserne ved fx ikke nøjagtigt, hvad de kan forvente af eleverne fra folkeskolen, hvad angår matematisk indsigt og kunnen. Tilsvarende ved de videregående uddannelser ikke nøjagtigt, hvilken matematisk indsigt og kunnen de kan forvente af studenterne efter en gennemført gymnasial uddannelse, og det samme gælder arbejdsgivere som modtager dimittender fra ungdomsuddannelserne. Ansættelsesinstanserne for folkeskolelærere oplever ofte et lignende problem, der dog ikke så meget angår detaljerne i en ansøgers matematiske indsigt og kunnen som eksistensen af den. De instanser, der ansætter lærere til det gymnasiale trin, hæfter sig sædvanligvis også mest ved tilstedeværelsen eller fraværet af større matematiske elementer på emne- eller disciplinniveau, hvor fokus først og fremmest er på, om en ansøger nu også har været udsat for det, der skal til for at opnå formel undervisningsautorisation eller ej. Andre kategorier af arbejdsgivere synes i mindre grad at have problemer med varedeklarationen, så længe der "foreligger en vare". I det omfang der overhovedet er sådanne problemer, består de typisk i usikkerhed om, hvilken slags arbejde folk kan sættes til.

Problem for tilrettelæggelse af uv.

Deklarationsproblemet ser først og fremmest ud til at være et problem ved tilrettelæggelse af undervisning, der hviler på forudgående uddannelsestrin. Hvis der er stor variation i de matematiske forudsætninger hos dem, som skal udsættes for matematikbaseret eller -forbrugende undervisning, kan der opstå problemer med overhovedet at detektere disse forudsætninger, eller problemer med at justere eller måske helt ændre de oprindelige planer for undervisningen. Begge dele kan være tidskrævende og besværligt for aftagerne, som enten må investere arbejde i detektion af forudsætninger og revision af planer, eller løber en risiko for at ramme ved siden af i deres henvendelse til modtagerne af undervisningen.

Spredning kan ikke undgås

Deklarationsproblemet er vanskeligt at komme til livs, fordi der inden for enhver population vil være spredning, som ikke kan indfanges af en summarisk beskrivelse. Også inden for fx tidligere tiders klassiske elitestudentereksamen for ganske få procent af befolkningen, eller inden for en klassisk eliteuniversitetsuddannelse i matematik for brøkdele af en promille af befolkningen, kunne man træffe på ganske store variationer. Men det giver naturligvis sig selv, at deklarationsproblemet vokser med størrelsen af populationen og med spredningen inden for den.

Målgruppeniveauproblemet

Indholdsmæssige konsekvenser af spredningsproblemet for målgruppernes udbytte

Hvor deklarationsproblemet fokuserer på det tidsforbrug og besvær, som kan opstå af stor spredning i dimittendernes indsigt og kunnen, fokuserer det andet problem, *målgruppeniveauproblemet*, på indholdsmæssige konsekvenser af denne spredning. Dette problem, som hovedsagelig, men ikke udelukkende opleves i undervisningsinstitutionerne, består i, at hvis en given undervisning skal meddeles til en meget heterogen modtagerkreds, er det vanskeligt at tilrettelægge den på en sådan måde, at alle får et rimeligt udbytte af den (med mindre der da afsættes yderligere ressourcer til i realiteten at betjene forskellige delgrupper forskelligt – jf. nedenstående afsnit om undervisningsdifferentiering – hvilket giver anledningen til nye problemer), for slet ikke at tale om at alle når samme "niveau" (hvis vi et øjeblik antager, at indholdet i dette begreb er klart). Hvis undervisningen, som det typisk ses, så indrettes til at henvende sig til eller under "den gennemsnitlige deltager", kan det opleves, at der sker en sænkning af det oprindeligt tilsigtede niveau. Sigtes omvendt på elever med den mest righoldige indsigt og kunnen, er der fare for, at undervisningen går hen over hovedet på flertallet, med de formelle eller reelle konsekvenser som måtte følge heraf, konsekvenser som både vi og mange andre betragter som menneskeligt, politisk og økonomisk uacceptable.

Problemets baggrund

Målgruppeniveauproblemet kommer af flere forskellige årsager, hvoraf hovedparten har almen uddannelsespolitisk karakter. En sådan årsag er knyttet til det forhold, at de forskellige dele af uddannelsessystemet frekventeres af en betydelig andel af de årgange de henvender sig til. En anden sådan årsag har at gøre med, at vi i Danmark har ønsket at undgå en meget finmasket opdeling og sortering af eleverne i folkeskolen og ungdomsuddannelserne i en mangfoldighed af linjer, grene, specialiseringer og niveauer, i hvert fald når det gælder et fag som matematik. At årsagerne til målgruppeproblemet har almen karakter betyder imidlertid ikke nødvendigvis, at det er helt uden for rækkevidde af fornuftige tiltag.

10.3.4 Problemer med undervisningsdifferentiering

Uv.differentiering som middel til at tackle heterogenitet

I de senere år har man i dansk matematikundervisning, især i grundskolen, fokuseret på undervisningsdifferentiering inden for den enkelte klasse. Det er til dels tænkt som et svar på nogle af de heterogenitetsproblemer, som følger af, at elever med stor spredning i baggrund, forudsætninger og interesse går i den samme klasse, hvilket på sin side er en følge af den føromtalte modstand mod vidtgående deling af eleverne i det danske skolesystem. Undervisningsdifferentiering sigter mod at indrette og tilpasse undervisningen i den enkelte klasse, så der netop tages særligt hensyn til den enkelte elevs baggrund, forudsætninger, interesser og formodede behov.

Hvad betyder uv.differentiering?

Der er forskellige problemstillinger knyttet til differentieringsspørgsmålet. Den første har at gøre med, hvad begrebet undervisningsdifferentiering overhovedet indebærer. Det andet angår forholdet mellem idealer og realiteter, dvs. mellem forskellige syn på og holdninger til differentiering på den ene side, og virkeligheden i institutioner og klasseværelser på den anden side.

Begrebsafklaring

Karakteristika ved ikke-differentieret uv.

Ser vi et øjeblik på sædvanlig, ikke-differentieret undervisning er der tale om, at alle elever i en klasse modtager den samme opmærksomhed fra læreren, både kvantitativt og kvalitativt set. Det vil sige, at læreren fordeler sin tid ligeligt mellem eleverne og udsætter dem for ca. de samme undervisningsaktiviteter, hvad enten det sker i form af klasseundervisning eller på anden måde. På den vis tages der ikke specielle hensyn til den enkelte elevs situation. Der kan dog godt foregå en begrænset individualisering af forholdet til den enkelte elev, fx ved at skriftlige opgaver eller gruppearbejder kommenteres individuelt, eller ved at der gives individuel tilbagemelding om standpunkt, udvikling osv. Men det, der er programsat i undervisningen, henvender sig til alle elever i lige grad, både hvad angår art og omfang.

Ensartet behandling fører til differentierede resultater

Mangfoldige vidnesbyrd slår fast, at med en sådan ikke-individualiseret undervisning bliver elevernes udbytte i almindelighed helt forskelligt, selv om man har tilstræbt at give dem den samme behandling. Nogle elever i en klasse kan få et betydeligt udbytte af undervisningen, mens dette for andre bliver langt mere beskedent. Det er med andre ord en kendt sag, at ensartet behandling næsten sikkert fører til meget varierende resultater, altså til resultatdifferentiering.

Kvantitativ og kvalitativ uv.differentiering

Alternativet er differentieret undervisning, også kaldet undervisningsdifferentiering, hvor de forskellige elever i en klasse modtager forskellig undervisning. Forskellen kan enten være af kvantitativ art, hvor den mængde læreropmærksomhed, som bliver de enkelte elever til del, kan variere betragteligt, eller af kvalitativ art, hvor de aktiviteter, som tilbydes de enkelte elever, varierer i form eller indhold. Naturligvis kan der også være tale om en kombination af kvantitativ og kvalitativ variation. Undervisningsdifferentiering, som her defineret, er tilsigtet og sættes i værk på baggrund af lærerens bedømmelse af den enkelte elevs situation, kapacitet og behov med henblik på at støtte hans eller hendes matematiktilegnelse. Vi taler altså ikke her om eventuelle utilsigtede forskelle.

Hensigten med undervisningsdifferentiering

Forskellige hensigter med uv.differentiering

Der kan være helt forskellige *hensigter* med undervisningsdifferentiering. Det kan fx være hensigten, at alle elever i klassen søges bragt frem til stort set de samme mål og resultater, men at det erkendes, at de for at opnå det har brug for meget forskelligartet støtte. Nogle elever kan på grundlag af ret begrænset hjælp fra læreren opnå det tilsigtede udbytte, mens andre nok kan opnå dette, men kun under anvendelse af en mere omfattende indsats målrettet til netop dem. Vi kunne kalde denne form af undervisningsdifferentiering *differentiering med henblik på at bibringe eleverne det samme udbytte*. Selv om det er hensigten at bringe eleverne "det samme sted hen" ved hjælp af undervisningsdifferentiering, er dette ikke så let at opnå i praksis. Hvis det mislykkes, får eleverne altså på trods af hensigten et ganske forskelligt udbytte af undervisningen.

Mål: Samme udbytte

Mål: Tilgodese elevernes forskellige behov og potentialer

Det kan også være hensigten at differentiere undervisningsindsatsen ud fra forestillinger om, at den enkelte elev har en bestemt stabil kerne af egne iboende behov eller muligheder, som har brug for forskellige grader af lærerindsats for at blive støttet eller komme til udfoldelse. For eksempel kunne det tænkes at såvel elever med store matematiktilegnelsesvanskeligheder som elever med særlig interesse og kapacitet for matematik havde brug for ekstra læreropmærksomhed. Det ligger i denne tankegang, at nogle elever har en på forhånd givet lyst, behov og kapacitet til at nå langt i beskæftigelsen med matematik, mens andre ikke har muligheder for at nå ret langt. Med denne hensigt er det en nærliggende konsekvens, at eleverne får meget varierende udbytte af matematikundervisningen, også selv om det ikke primært er hensigten at skabe denne variation. Vi kunne kalde denne form for undervisningsdifferentiering *differentiering med henblik på at realisere den enkelte elevs potentiale*.

Problemer mht. undervisningsdifferentiering

Hvilke problemer er der nu med undervisningsdifferentiering? Lad os som udgangspunkt slå fast, at arbejdsgruppen er tilhænger af undervisningsdifferentiering i matematikundervisningen. Elevernes situation er så forskellig, at udifferentieret undervisning fører til uønsket store forskelle i udbytte. Problemet er altså ikke af principiel, men af konkret karakter.

Arbejdsgruppen går ind for uv.differentiering

For det første er det et problem, hvis det er ønsket eller besluttet at gennemføre undervisningsdifferentiering, samtidig med at de lærerressourcer, der stilles til rådighed, reelt ikke tillader en sådan. Det ser fx ud til at være situationen mange steder i folkeskolen. Denne situation kommer let til at betyde, at undervisningsdifferentieringen enten helt udebliver, eller at den søges gennemført alligevel, med den konsekvens at nogle elevgrupper bliver ladt i stikken med en ringe grad af læreropmærksomhed. Begge dele fører til resultatdifferentiering, hvad enten det er tilsigtet eller ej. Dette problem bliver særlig tydeligt i klasser med stor spredning mellem eleverne.

Utilstrækkelige ressourcer til differentiering

Et andet, og lidt mere grundliggende, problem opstår, hvis undervisningsdifferentiering med henblik på at realisere den enkelte elevs potentiale finder sted på grundlag af en fejlbedømmelse af elevernes adfærd, muligheder og behov. Det stiller betydelige krav til læreren at trænge til bunds i en elevs virkelige potentialer, ikke mindst fordi disse næppe er statiske, men er underkastet udvikling. Ved at låse nogle elever fast i bestemte roller og behandle dem derefter, kan matematikundervisningen ende med at give dem stene for brød. Man kan her spørge, om ikke dansk matematikundervisning i for høj grad affinder sig med unødvendigt store forskelle i elevernes udbytte og fortolker dem som forskelle i elevernes kapacitet. Derved kan en sådan undervisningsdifferentiering forstærke i forvejen eksisterende forskelle i elevernes sociale, økonomiske og uddannelsesmæssige miljø i stedet for at bidrage til at udjævne dem. På den anden side er det naturligvis tilsvarende et problem, hvis undervisningsdifferentiering, iværksat med henblik på at bibringe eleverne det samme udbytte, kommer til kort over for opgaven, fordi spredningen er for stor eller vilkårene for vanskelige.

Faren for fejlbedømmelse af den enkelte elevs behov og muligheder

En stillingtagen til disse problemers betydning er nært forbundet med såvel menneskesyn som almene politiske og samfundsmæssige holdninger. Et lighedsorienteret standpunkt vil finde udtalt resultatdifferentiering meget problematisk, hvad enten den er tilstræbt eller ej. Et ulighedsorienteret standpunkt vil ikke i sig selv se problemer i resultatdifferentiering, når blot undervisningsdifferentieringen afspejler, hvad der anses for de reelle forskelle i elevers situation og kapacitet.

Syn på uv.differentiering afspejler almene holdninger

At rede de mange tråde i denne problemstilling ud gennem undersøgelser af alle de nævnte problemers eksistens og omfang, ville kræve selvstændige forskningsprojekter. Det falder uden for rammerne af dette projekt.

10.3.5 Evalueringsproblemer

Evaluering virker tilbage på uv. og læring

I al matematikundervisning er evalueringsspørgsmål af central betydning, hvad enten man tænker på forskellige former for afsluttende evaluering, herunder prøver og eksamener, eller på løbende evaluering knyttet til selve undervisningen. Der er overvældende forskningsmæssig evidens for, at uanset hvilke evalueringsformer der benyttes, udøver evalueringen en væsentlig tilbagevirkende indflydelse på undervisnings- og læreprocesser.[15] Kort og sloganagtigt bliver det nogle gange formuleret som "det, man evaluerer, er det, man opnår" (og også det, man får øje på).

Det, der ikke evalueres, overses

Evalueringens tilbagevirkning på undervisnings- og læreprocesserne er ikke i sig selv et problem. Tværtimod kan koblingen betragtes som et potentielt nyttigt instrument i forbindelse med undervisningstilrettelæggelse og -afvikling. At have et så kraftfuldt instrument til sin rådighed kræver imidlertid, at man er meget opmærksom på, hvordan det bruges: Kompetencer, viden og færdigheder, som ikke gøres til genstand for evaluering – i et system hvori evaluering overhovedet findes – bliver let usynlige, hvis ikke de simpelthen visner væk. Med andre ord, de kompetencer, man ønsker, at eleverne udvikler, må ikke alene sættes udtrykkeligt på dagsordenen i undervisningen, de må også sættes på dagsordenen for evalueringen. Evalueringsformerne leverer et meget mere effektivt instrument for den reelle udpegning af, hvad der på et givet matematikundervisningstrin anses for henholdsvis vigtigt og uvigtigt, end alverdens formålsformuleringer, lærebogsformaninger, lærerforedrag osv.

På den baggrund kan man pege på to varianter af evalueringsproblemet, som har særlig betydning for dansk matematikundervisning.

Disharmoniproblemet

Disharmoni mellem evalueringsformer og det man ønsker at fremme og måle

Den første variant, som man i mangel af et bedre ord kunne kalde *disharmoniproblemet*, består i, at mange af de evalueringsformer, der traditionelt benyttes i dansk matematikundervisning, kun i begrænset grad tillader evaluering af de matematiske kundskaber, man egentlig ønsker at fremme i matematikundervisningen. I nogle tilfælde er der tale om, at de nærmest modvirker efterstræbelsen af disse kundskaber. Det er ikke mindst tilfældet med de gængse eksamensformer, som fx – alene på grund af tidsrammerne – ikke giver rum for seriøst arbejde med matematisk modelbygning eller med mere dybtgående problemløsning.

[15] Se fx Niss (1993b,c) og Clarke (1996), der rummer både analyser og eksempler med et internationalt perspektiv, og Barnes et al. (2000), der med afsæt i australske erfaringer argumenterer for nødvendigheden af at indtænke nye evalueringsformer i forbindelse med læseplansreformer.

I det omfang den faktiske daglige undervisning søger at opbygge erfaringer, indsigt, viden, kundskaber og færdigheder, som ikke kan tages ordentligt i betragtning af de benyttede evalueringsformer, findes disharmonien ikke blot mellem disse former og de kundskaber, som dybest set efterspørges, men også mellem evalueringsformerne og selve den undervisning som bedrives. Men eftersom evaluering som nævnt oftere udøver en stærk tilbagevirkning på undervisningen end omvendt, giver disharmoniproblemet anledning til forvridning af både matematikundervisning og -læring i forhold til det, som egentlig tilsigtes.

Disharmoni mellem evalueringsformer og undervisning

Selv om der i de senere år i Danmark er foregået en del udviklingsarbejde på evalueringsfronten samtidig med en opblødning af de traditionelle rammer for evaluering, er disharmoniproblemet stadig ganske manifest, ikke mindst i forhold til sanktionsgivende prøver og eksamener. Der er altså fortsat behov for tiltag på forskellige fronter, som kan bidrage til at mindske disharmoniproblemet.

Fortolkningsproblemet

Problemer med at tolke evalueringsresultater på gyldig og dækkende måde

Den anden variant er *fortolkningsproblemet*. Det består i, at hvad enten de benyttede evalueringsformer nu egner sig til at evaluere det vigtige eller ej, er der ofte problemer med at sikre sig, at det, de faktisk sigter mod at evaluere, bliver evalueret pålideligt og dækkende. Det er svært at skaffe sikkerhed for, at de fortolkninger og konklusioner, som ved hjælp af et givet evalueringsinstrument opnås om elevers matematiktilegnelse og -beherskelse, faktisk er holdbare for en nærmere og mere dybtgående efterprøvning. Her er der mange forskningsresultater som viser[16], at man ofte kan nå til vildledende konklusioner med evalueringsformer som ikke muliggør kontrol- og opfølgningsspørgsmål på givne svar, sådan som det fx er tilfældet med mange former for skriftlige opgaver, ikke mindst af "stykkeregningstypen".

Fare for vildledende konklusioner

En afdækning af det virkelige omfang af dette problem i matematikundervisningens praksis ville kræve et forsknings-, snarere end et udviklingsarbejde. Imidlertid kan der, jf. kapitel 9, være grund til at slå fast, at der findes evalueringsinstrumenter, som tillader en rimelig grad af fortolkningsvaliditet og -pålidelighed, men at disse sædvanligvis er ressource- og tidskrævende både for lærere og elever.

Forklaringer på evalueringsproblemet

Når de to varianter af evalueringsproblemet ikke sådan er til at blive af med, skyldes det hovedsagelig tre forhold. For det første ressource- og tidsbegrænsninger, herunder vanskelighederne med at afveje hvordan evalueringsaktiviteter skal afbalanceres med sædvanlig undervisning. For det andet almindelig inerti i alle lag af

Årsager: Ressourcebegrænsninger, inerti og ukendskab

[16] Se evt. Bodin (1993), som med reference til en fransk undersøgelse diskuterer problemstillingen i forhold til forskellige evalueringsformer, eller Jakobsen et al. (1999), som er en rapport fra et udviklingsarbejde på DTU, hvor 10 hold bl.a. blev udsat for to forskellige former for evaluering, som gav vidt forskellige resultater.

systemet og skepsis over for nye tiltag, ikke mindst på et traditionelt følsomt og konsekvenstungt felt som evaluering, der jo bl.a. spiller en rolle i udstikningen af elevers fremtidige levevej og tilværelse. Og sidst, men ikke mindst, ukendskab til alternative evalueringsformer og deres muligheder, rækkevidde og begrænsninger.

11 Anbefalinger

11.1 Indledning

Det har hele tiden ligget i KOM-projektets vilkår og karakter, at det skulle være afsøgende, udviklende, idéskabende og eksemplificerende. Projektet har hverken skullet være et forskningsprojekt i traditionel forstand eller et beslutnings- og implementationsprojekt. Det indgår således ikke i kommissoriet for arbejdet, eller for den sags skyld i arbejdsgruppens baggrund, at der skal fremsættes fx forslag til bekendtgørelser eller ændringer heri, konkrete læseplaner, og lignende, for de forskellige slags matematikundervisning som findes i landet. Dette følger allerede af, at arbejdsgruppen ikke er blevet udstyret med et mandat, der indebærer overførelse af myndighedsbeføjelser fra andre instanser til arbejdsgruppen. På den måde bliver det op til de forskellige relevante instanser at tage stilling til, om, og i givet fald på hvilken måde, tankerne og de overordnede anbefalinger i denne rapport kan konkretiseres og føres ud i livet. Arbejdet med det må antages at få et ikke forsvindende omfang.

Ikke et beslutnings- eller implementeringsprojekt

Realisering af anbefalingerne er arbejdskrævende

Nedenfor anføres de overordnede anbefalinger, arbejdsgruppen ønsker at fremsætte i den forbindelse. Først bringes en oversigt over anbefalingerne i punktform, struktureret efter adressaterne på anbefalingerne, dvs. de instanser som opfordres til at gøre sig til aktører i forhold til den enkelte anbefaling. Dernæst fremsættes arbejdsgruppens kommentarer til og begrundelser for anbefalingerne.

Der kan være grund til at understrege, at anbefalingerne ikke har enten-eller karakter. Det er altså ikke kun en total realisering af dem, der er meningsfuld. Også en partiel realisering kan bidrage til at fremme tanker og intentioner i KOM-projektet. Men naturligvis er rækkevidden heraf nært forbundet med omfanget af realiseringen af anbefalingerne.

Ikke et enten-eller spørgsmål

11.2 Oversigt over anbefalingerne

Nogle af de nedenstående anbefalinger er markeret med en *. Det er anbefalinger, som arbejdsgruppen tillægger særlig vægt, og som ufortøvet bør sættes i værk. Man må ikke deraf slutte, at de øvrige anbefalinger ikke også har betydning. De skal blot enten ses som til dels afledte anbefalinger eller som anbefalinger af en mere langsigtet og mangesidet karakter.

*-markerede anbefalinger

11.2.1 Undervisningsministeriet anbefales at

Læse- og kursusplaner

1.1.* udarbejde konsistente og sammenhængende *læse- og kursusplaner* i matematik, baseret på kompetencer som behandlet i denne rapport, for henholdsvis grundskolen, ungdomsuddannelserne, erhvervsuddannelserne, og de ikke-videregående voksenuddannelser. Dette kunne fx ske gennem nedsættelse af arbejdsudvalg for de berørte uddannelsesområder samt koordinationsudvalg, der har til opgave at sikre sammenhængen på langs og tværs af de nævnte udddannelsestrin.

Komp.forbrugende udd.

1.2. drage omsorg for, at relevante *matematiske kompetencer indgår i uddannelser*, der ikke i sig selv er specifikt matematiske, men som alligevel betjener sig af matematiske kompetencer.

Forny

1.3. tage initiativ til iværksættelse af *systematiske, centralt styrede forsøg*, samt sikring af *juridisk-administrativt råderum* for lokalt initierede forsøg, med såvel undervisning som evaluerings- og eksamensformer, til fremme af kompetencebaseret matematikundervisning. Udvalgte forsøg bør følges, overvåges og bedømmes fra forskningsmæsigt hold.

Prøve- og eksamensformer

1.4.* igangsætte et arbejde til *revision og supplement af de anvendte prøve- og eksamensformer og –instrumenter*, med henblik på dækkende og pålidelig evaluering af hele spektret af matematiske kompetencer.

- Det kan både ske ved at skaffe information om og udnytte former og instrumenter, som har været afprøvet andre steder i ind- og udland, og ved at der opfindes og udvikles helt nye.

Læreruddannelse

1.5.* sikre, at *uddannelsen af matematiklærere* til alle uddannelsestrin under ministeriets ressort indrettes og tilrettelægges sådan, at de kommende lærere udstyres med de matematiske, didaktiske og pædagogiske kompetencer, som fremdrages i denne rapport.

Faglig-pædagogisk udd. nødvendig

1.6.* udarbejde retningslinjer og planer til sikring af, at matematikundervisningen i folkeskolen *kun varetages af lærere med en faglig-pædagogisk uddannelse* i faget.

Efter- og videreudd.

1.7.* udvikle, iværksætte og (med)finansiere et bredt spektrum af *efter- og videreuddannelsesaktiviteter i matematik* for lærere på alle relevante uddannelses- og undervisningstrin.

Inddrag aktørerne

1.8. sikre *aktiv inddragelse af matematikundervisningens aktører*, frem for alt lærerne, i alle ministerielle tiltag, som har til opgave at implementere denne rapport og dens anbefalinger.

Gymnasiereform

1.9. tage initiativ til gennemførelse af en *gymnasiereform*, der opererer med gennemtænkte og komponerede fagpakker, således at vidtgående samarbejde mellem fagene gøres muligt.

11.2.2 Universiteter og højere læreanstalter anbefales at

2.1. overveje *revision af studieordninger og kursusplaner* for de matematiske fag, med henblik på at basere disse på hele sættet af matematiske kompetencer, som præsenteret i denne rapport. Dette bør ske under inddragelse af rapportens betragtninger om samspillet mellem kompetencer og fagligt stof og om mulighederne for evaluering af kompetencer. (Med "matematiske fag" tænkes her både på matematik som videnskabsfag (matematikstudierne), som anvendelsesfag (som støtte og redskab for matematikbaserede fagområder) og som undervisningsfag (i læreruddannelser)). Studieordninger og kursusplaner

– Dette kan ske ved nedsættelse af arbejdsudvalg for de berørte uddannelser.

2.2. tage initiativ til *didaktisk og pædagogisk udviklingsarbejde* vedrørende den udbudte undervisning i de matematiske fag. Udviklingsarbejde

2.3.* medvirke til at sikre, at *uddannelsen af matematiklærere* til gymnasiale og videregående niveauer indrettes og tilrettelægges sådan, at de kommende lærere forberedes på at bedrive undervisning, der sigter mod at udstyre modtagerne med de foreslåede matematiske kompetencer. Udd. af lærere

– Dette bør ske ved, at de kommende lærere udstyres med de matematiske, didaktiske og pædagogiske kompetencer, som er fremdraget i denne rapport.

2.4. drage omsorg for, at lærerne i de matematiske fag sikres en *styrkelse af deres fagdidaktiske og -pædagogiske kompetencer*. Fagdidaktisk og pædagogisk opgradering

– Dette kan ske gennem efter- og videreuddannelsesaktiviteter for de allerede lærere, og som særlige kursusforløb for adjunkter og andre nyansatte m.fl.

2.5. iværksætte et *systematisk eftersyn af de evalueringsformer og -instrumenter*, som benyttes til løbende intern evaluering, med henblik på at afdække disses kapacitet til at evaluere de forskellige matematiske kompetencer på en dækkende og velfunderet måde, og på at tilpasse og målrette dem, så denne kapacitet kan komme til udtryk og udfoldelse. Evaluering

2.6. igangsætte et arbejde med *at revidere og supplere de anvendte prøve- og eksamensformer og -instrumenter*, sådan at hele spektret af kompetencer kan evalueres på gyldig og pålidelig vis. Prøve- og eksamensformer

– Det kan både ske ved at skaffe information om og udnytte former og instrumenter, som har været afprøvet andre steder i ind- og udland, og ved at der opfindes og udvikles helt nye.

Kontakt- og samarbejdsorganer

2.7. tage initiativ til, på regionalt niveau, at oprette *kontakt- og samarbejdsorganer* med de gymnasiale skoler i regionen, med henblik på at igangsætte og vedligeholde diskussioner og projekter om overgangsproblemerne i matematik fra ungdomsuddannelserne til de videregående uddannelser.

11.2.3 Lærerseminarierne/CVUerne anbefales at

Revision af grundskolelærer-udd.

3.1.* i samarbejde med Undervisningsministeriet at tage *indretningen af matematiklæreruddannelsen til grundskolen op til revision*, med henblik på at udstyre et tilstrækkeligt antal lærere med de matematiske, didaktiske og pædagogiske kompetencer som er fremdraget i denne rapport. Dette bør ske under inddragelse af rapportens betragtninger om samspillet mellem kompetencer og fagligt stof og om mulighederne for evaluering af kompetencer. Revisionen bør også sikre, at det forudsættes, at de studerende har en matematikbaggrund på mindst gymnasialt B-niveau.

Komp.orienteret uv.

3.2. sikre, at *kommende matematiklærere* til grundskolen forberedes på at *bedrive undervisning*, der sigter mod at udstyre modtagerne med de foreslåede matematiske kompetencer.

Opgradering af lærerne

3.3. drage omsorg for, at deres egne lærere i matematik sikres en *styrkelse af deres faglige, fagdidaktiske og -pædagogiske kompetencer*.

- Dette kan ske gennem efter- og videreuddannelsesaktiviteter for de allerede fastansatte lærere og som særlige kursusforløb for nyansatte m.fl.

Evaluering

3.4. iværksætte et *systematisk eftersyn af de evalueringsformer og -instrumenter*, som benyttes til løbende intern evaluering, med henblik på at afdække disses kapacitet til at evaluere de forskellige matematiske kompetencer på en dækkende og velfunderet måde, og på at tilpasse og målrette dem, så denne kapacitet kan komme til udtryk og udfoldelse.

Prøve- og eksamensformer

3.5. igangsætte et arbejde med at *revidere og supplere de anvendte prøve- og eksamensformer og –instrumenter*, sådan at hele spektret af kompetencer kan evalueres på gyldig og pålidelig vis.

- Det kan både ske ved at skaffe information om og udnytte former og instrumenter, som har været afprøvet andre steder i ind- og udland, og ved at der opfindes og udvikles helt nye.

11.2.4 Erhvervsuddannelsesskolerne anbefales at

Afdække mat. komp.

4.1. iværksætte et arbejde til at *afdække og artikulere de matematiske kompe-*

tencer, som søges opbygget som del af den enkelte erhvervsuddannelse, og til at tage stilling til, under hvilke undervisningsmæssige rammer denne opbygning bedst kan finde sted. Med "berørte institutioner" tænkes her både på institutioner, hvis uddannelser indebærer udvikling af visse matematiske kompetencer hos deres elever eller studerende, uden at matematiske fag er på dagsordenen i nogen eksplicit form, og institutioner hvis uddannelser direkte har matematikundervisning på programmet.

11.2.5 Kommuner og amter og andre lokale skolemyndigheder anbefales at

5.1. sikre eller fremme udarbejdelsen af uddybende lokale *læse- og kursusplaner* i matematik, baseret på kompetencer som behandlet i denne rapport, for skolerne inden for deres ressort. Læse- og kursusplaner

- Dette kunne fx ske gennem nedsættelse af arbejdsudvalg for de berørte uddannelsesområder.

5.2. sikre lærerne på den enkelte skole *tid til at samarbejde* om udviklingen af matematikundervisningen i overensstemmelse med tankerne i denne rapport. Tid til samarbejde

5.3. sikre økonomisk og administrativt *råderum for forsøgsundervisning* iværksat på lokalt initiativ, med det formål at (videre)udvikle veje til at sætte de matematiske kompetencer på dagsordenen i undervisningen. Forsøgsuv.

5.4. drage omsorg for, at matematikundervisningen i folkeskolen *kun varetages af lærere med en faglig-pædagogisk uddannelse* i faget. Fagligt-pædagogisk kompetente lærere

5.5.* sikre rammer for og finansiering af et bredt spektrum af faglig og pædagogisk-didaktisk *efter- og videreuddannelsesaktiviteter* – af ordentlig kvalitet – i matematik for alle matematiklærere inden for deres ressort. Efter- og videreudd.

5.6. arbejde for at opnå *elev- og forældreforståelse* af, at det kræver en solid elevindsats at udvikle de matematiske kompetencer, som er behandlet i denne rapport. Elev- og forældreforståelse

11.2.6 Matematiklærere og deres organisationer anbefales at

6.1. på alle trin at iværksætte *forsøgsundervisning*, både i større og mindre skala, med det formål at (videre)udvikle veje til at sætte de matematiske kompetencer på dagsordenen i undervisningen. Forsøgsuv.

6.2. efterse og udvikle de *evaluerings- og prøveformer og -instrumenter*, som matematiklæreren benytter til løbende intern evaluering, med henblik på at Evaluering afdække disses kapacitet til at evaluere de forskellige matematiske kompetencer på en dækkende og velfunderet måde, og på at tilpasse og målrette dem, så denne kapacitet kan komme til udtryk og udfoldelse.

Efter- og videreudd.

6.3. deltage i et bredt spektrum af *efter- og videreuddannelsesvirksomhed*, med henblik på at styrke deres forudsætninger for at tilrettelægge og gennemføre en kompetenceorienteret matematikundervisning.

Forskningsprojekter

6.4. indgå i samarbejde med matematikdidaktiske forskere om igangsættelse af egentlige matematikdidaktiske *forskningsprojekter* til beskrivelse og analyse af tiltag for skabelse af kompetenceorienteret matematikundervisning.

Kontakt- og samarbejdsorganer

6.5. oprette permanente *kontakt- og samarbejdsorganer* for henholdsvis matematiklærerne i folkeskolerne og ungdomsuddannelserne, og for matematiklærerne i de gymnasiale uddannelser og de videregående uddannelser, med den opgave at igangsætte og vedligeholde diskussioner og projekter om overgangsproblemerne i matematik fra det ene uddannelsestrin til det andet.

11.2.7 Lærebogsforfattere og forlag anbefales at

Læremidler med fokus på komp.

7.1. *udvikle og udarbejde læremidler*, som kan danne grundlag for en undervisning, der søger at bibringe eleverne hele spektret af matematiske kompetencer samt de i denne rapport fremhævede former for overblik og dømmekraft vedrørende matematik som fagområde.

11.2.8 Matematikdidaktiske forskere anbefales at

Forskningsprojekter om komp.

8.1. i samarbejde med lærere, institutioner og myndigheder at igangsætte egentlige matematikdidaktiske *forskningsprojekter* til beskrivelse og analyse af tiltag for skabelse af kompetenceorienteret matematikundervisning.

11.3 Kommentarer til og begrundelser for anbefalingerne

11.3.1 Anbefalinger om læse- og kursusplansrevisioner

Det er arbejdsgruppens opfattelse, at tiltag, der fører nogle af KOM-projektets betragtninger ud i livet i form af læseplans- og studieordningsrevisioner, kan give et væsentligt bidrag til højnelse af matematikundervisningens (ambitions)niveau de fleste steder.

Nyorientering og nybeskrivelse

I forbindelse med et sådant arbejde med at nyorientere og nybeskrive formål med og mål for, samt indretning af matematikundervisningen, vil der antagelig mange steder være et behov for nærmere præcisering af elevers eller studerendes besiddelser af de forskellige kompetencer og disses sampil med fagligt stof; sikkert også i større grad end vi har kunnet præstere i denne rapport. Hvis noget sådant sættes i værk, er det essentielt at søge at undvige to farer. For det første kan der være fare for, i et for så vidt forståeligt ønske om med en sådan præcisering at blive så konkret og specifik som mulig, at ende i en alt for omfattende og detaljeret udpinding og selvstændiggørelse af de enkelte træk ved og elementer i de omhandlede matematiske kompetencer. Dette vil føre til en forskertsning af selve den bagvedliggende tankegang, som jo består i at identificere et mindre antal bærende komponenter i besiddelsen af matematisk faglighed. For det andet kunne det måske, for nogle, være fristende at omsætte kompetencerne, der jo hver for sig repræsenterer et flerdimensionalt spektrum af beherskelse, som aldrig kan erhverves "fuldt ud", til udpegning af overskuelige og genkendelige, behavioristisk beskrevne færdigheder i at håndtere et sæt af veldefinerede situationer og hverv. Men det ville føre til en dramatisk reduktion af det ambitionsniveau, der knytter sig til den her foreslåede karakterisering af matematisk faglighed. Det er altså afgørende, at "klare mål" ikke identificeres med "simple" eller "forenklede mål".

Undgå overdetaljering

Undgå forsimpling

Disse overvejelser er baggrunden for anbefalingerne 1.1, 1.2, 1.5, 2.1, 3.1, 4.1 og 5.1. Her anbefales for det første, at de relevante myndigheder, organer, organisationer og institutioner overvejer – fx gennem nedsættelse af arbejdsudvalg - i hvilke henseender, og på hvilken måde, læse- og kursusplanerne i matematik i de respektive uddannelser kan baseres på en beskrivelse af matematiske kompetencer, som præsenteret i denne rapport. Det bør ske under inddragelse af rapportens betragtninger om samspillet mellem kompetencer og fagligt stof og om mulighederne for evaluering af kompetencer. Under forudsætning af at disse overvejelser for et givet uddannelsestrin når frem til, at en sådan beskrivelse er mulig og ønskelig, bør arbejdsudvalgene have til opgave at udarbejde udkast til bekendtgørelse(r) eller tilsvarende regelsæt på det nævnte grundlag. For det andet anbefales det at sikre informationsudveksling, konsistens, og i fornødent omfang samordning, på langs og tværs af matematikundervisningen på de ovenfor nævnte uddannelsestrin. Dette er en følge af, at det har været et hovedformål med KOM-projektet at bidrage til at skabe sammenhæng og progression i matematikundervisningen op igennem uddannelsessystemet, gennem etablering af et fælles begrebs- og beskrivelsesapparat.

Integreret tilgang

Hvad specielt angår de erhvervsmæssige eller videregående uddannelser, som ikke i sig selv har et matematisk præg, men hvori matematik er et vigtigt hjælpe- eller redskabsfag, vil vi understrege den traditionelle betydning af modelleringskompetence, repræsentationskompetence, symbol- og formalismekompetence, men tillige hjælpemiddelkompetence, hvor fx computeralgebrasystemer, regneark og statistiksoftware bør tillægges vægt. Imidlertid er det i stigende grad væsentligt, at både problembehandlingskompetence og kommunikationskompetence udvikles til gavn for de matematikforbrugende fag. Det diskuteres ofte blandt matematikundervisere og matematikbrugere, hvor megen vægt, der skal lægges på tankegangs- og ræsonnementskompetence.

Mat.forbrugende fag

it

Det er her arbejdsgruppens synspunkt, at jo mere magtfulde it-redskaber, der er til rådighed for den tekniske bearbejdning af matematikholdige problemstillinger, jo væsentligere er det at kunne forholde sig til de spørgsmål, der behandles, og til de svar, der gives, hvilket netop står i centrum for tankegangs- og ræsonnementskompetencerne.

Alle komp. bør tillægges (varierende) vægt

Med hensyn til matematikuddannelserne er det arbejdsgruppens opfattelse, at alle kompetencerne i spektret bør tillægges vægt, også dem, som - nogle steder - traditionelt ikke har været på dagsordenen, såsom modellerings-, kommunikations- og hjælpemiddelkompetencerne. I sammenhænge hvor det kan lade sig gøre, bør modelleringskompetence så vidt muligt udvikles i nært samarbejde med nabofag, som fysik, økonomi, biologi, datalogi osv.

11.3.2 Anbefalinger vedrørende kontakt og samarbejde mellem uddannelsesformer og -trin

Brud og overgangsproblemer

Et af de overordnede problemer i dansk matematikundervisning, som blev nærmere omtalt i kapitel 10, er de store brud i kultur, perspektiver, indhold, krav og undervisningspraksis, der sker ved overgangen fra en del af uddannelsessystemet til en anden – fra grundskole til ungdomsuddannelser, fra ungdomsuddannelser til videregående uddannelser – brud som bl.a. skaber overgangsproblemer vedrørende de elever, som går fra den ene del til den anden.

Opblødning nødvendig

Det er en hovedpointe for dette projekt, at nogle af disse problemer kan afhjælpes og mindskes gennem accept og anvendelse af en fælles, overordnet forståelse af matematikundervisningens hensigter og endemål, som den der tilbydes af en kompetencebaseret tilgang. Imidlertid er brudlinjerne mellem delene så rodfæstede, at det ikke er realistisk at vente sig væsentlige fremskridt i opblødningen af dem ved hjælp af et enkelt middel. En mangfoldighed af tiltag på alle niveauer er nødvendige for at opnå dette.

Kontakt- og samarbejdsorganer

Nogle af disse tiltag indgår i anbefalingerne 1.2, 2.7 og 6.5. Her anbefales det at oprette permanente kontakt- og samarbejdsorganer, med den opgave at igangsætte og vedligeholde diskussioner og projekter om overgangsproblemerne i matematik. Det er arbejdsgruppens opfattelse, at kompetencetilgangen vil kunne være til væsentlig hjælp som et fælles grundlag for sådanne diskussioner og projekter. På grund af den indholdsmæssige og geografiske kompleksitet af dele af uddannelsessystemet kan vi ikke foreslå nogen fælles, simpel model for sådanne organer. I nogle forbindelser ville være nærliggende, om den enkelte videregående uddannelsesinstitution tog initiativet til at oprette et sådant organ, i andre bør det være en sag for skolerne og matematiklærerne i et område at udtænke brugbare modeller for kontakten og samarbejdet.

11.3.3 Anbefalinger vedrørende forsøgsundervisning

KOM-projektet har koncentreret sig om selve karakteriseringen af matematikbeherskelse i forhold til forskellige dele af uddannelsessystemet, og dermed om indretningen af rammerne for matematikundervisningen, om de overordnede problemer, matematikundervisningen kan siges at stå over for, samt om matematiklærernes professionelle kompetencer. Dette kan, som ovenfor anbefalet, danne baggrund for nye måder at beskrive kursus- og læseplaner på. Det skaber tillige en række instrumenter som kan anvendes af lærere til at udvikle eller nyorientere deres undervisning, så den for alvor sætter fokus på udvikling af elevers og studerendes matematiske kompetencer. Det er ikke oplagt, at form og indhold af al den matematikundervisning, som aktuelt bedrives i Danmark, egner sig lige godt til dette formål.

Det falder uden for KOM-projektets rammer at give anvisninger på, hvordan undervisningen konkret kan tilrettelægges og gennemføres, så den bidrager til at løse denne opgave, på hvilke elev- og studenteraktiviteter, der kan være formålstjenlige, og på hvordan lærebøger og andre undervisningsmaterialer kan udformes, så de fremmer forehavendet m.m.m.

Ingen enkle, hurtige svar – nødvendigt med forsøg

Det siger sig selv, at disse spørgsmål på mange måder er de vigtigste for realiseringen af KOM-projektets tanker, og at der ikke findes enkle og hurtige svar på dem. Svarene må indvindes gennem forsøgsundervisning både inden for og uden for de gældende formelle rammer for matematikundervisningen.

Vejen for forsøg må banes

Dette er noget af baggrunden for anbefalingerne 1.3, 2.2, 5.2, 5.3, 6.1, 7.1 og til dels 8.1. Her anbefales det på den ene side Undervisningsministeriet, kommuner, amter, samt uddannelsesinstitutioner at sikre juridisk-administrativt, tidsmæssigt og ressourcemæssigt råderum for en mangfoldighed af forsøgsundervisning, sigtende mod at (videre)udvikle veje til at sætte de matematiske kompetencer på dagsordenen for undervisningen, og på den anden side matematiklærere og andre relevante aktører at gå aktivt ind i en sådan forsøgsundervisning. Det vil tillige være ønskeligt, at særligt interesserede og engagerede matematiklærere på alle trin samarbejder med matematikdidaktiske forskere om egentlige forskningsprojekter vedrørende kompetenceorienteret matematikundervisning. Dette er netop indholdet af anbefaling 6.4.

11.3.4 Anbefaling vedrørende lærebøger og andre undervisningsmidler

Behov for nye uv.midler

Det er oplagt, at en kompetenceorienteret matematikundervisning må betjene sig af lærebøger og andre undervisningsmidler, som er i harmoni med forehavendet. Her er det tydeligt, at kun en mindre del af kompetencespektret er repræsenteret, for ikke at tale om betonet, i de fleste af de eksisterende bøger og materialer. Dette er hovedbaggrunden for anbefaling 7.1.

11.3.5 Anbefaling vedrørende efter- og videreuddannelse af lærere

Hvis KOM-projektets tanker skal kunne føres ud i livet, må matematiklærerne på alle trin udstyres med kompetencer til at tilrettelægge, organisere og gennemføre undervisning, som tager sigte på at udvikle elevernes og de studerendes matematiske kompetencer. Med henblik på at imødekomme det, uden tvivl omfattende, behov for professionel kompetenceudvikling hos de eksisterende lærere, der følger heraf, er det nødvendigt, at iværksætte et spektrum af efter- og videreuddannelsesaktiviteter på alle uddannelses- og undervisningstrin, hvilket er indholdet i anbefalingerne 1.7, 2.4, 3.3, 5.5 og 6.3.

Professionel komp.udvikling

Efter- og videreuddannelsesvirksomhed kan finde sted på forskellige ambitionsniveauer, rækkende fra kollegiale studiekredse på lokalt niveau, over møder og konferencer, til egentlige kurser samt omfattende lokale, regionale eller nationale udviklingsprojekter. Også her er det afgørende, at der afsættes tid, rum og ressourcer, hvis aktiviteterne skal kunne få tilstrækkeligt omfang og gennemslag.

Det giver sig selv, at jo mere vidtgående en opkvalificering af landets matematiklærerkorps, man ønsker, jo større en skala bør efter- og videreuddannelsesaktiviteterne finde sted på. *I den forbindelse er det arbejdsgruppens opfattelse, at der vil være langt større positive effekter at hente i en substantiel, generel opgradering af matematiklærerne i overensstemmelse med KOM-projektets tanker end ved at afsætte flere timer til undervisningen*, om end en timetalsforøgelse naturligvis vil give matematikundervisningen et øget udfoldelsesrum.

Komp.udvikling af lærerne vigtigst

11.3.6 Anbefalinger vedrørende uddannelsen af matematiklærere

Når det gælder kommende matematiklærere, er virkeliggørelsen af KOM-projektets tanker og idéer en mere omfattende og kompleks opgave, der har betydelige uddannelsespolitiske, -strukturelle og -økonomiske implikationer af en almen art.

Imidlertid kan tiltag, der måtte føre til ændringer af matematiklæreruddannelserne, ikke ses isoleret fra overordnede spørgsmål om uddannelsen af lærere i almindelighed. Som det blev diskuteret i nogen detalje i kapitel 10, er der på alle trin forskellige problemer og udfordringer knyttet til danske matematiklæreres virke, og til den baggrund de har for at udøve deres profession.

Sammenvævet med lærerudd. i almindelighed

Det mest påfaldende og dominerede træk ved matematiklærerne på et givet uddannelsestrin er den kolossale forskellighed og mangfoldighed, der karakteriserer dem. Det betyder, at enhver generalisering vil være misvisende i forhold til store delgrupper af lærerne. Ikke desto mindre ser vi for de forskellige grupper nogle gennemgående problematiske træk, som ikke bør tabubelægges og forties, og som kalder på forandringer.

Forskellighed og mangfoldighed

Lad det straks være sagt meget klart, at disse problematiske træk ikke skyldes fejl og mangler ved enkeltpersoner, -grupper eller -institutioner. Der er tale om systemproblemer for det samlede danske uddannelsessystem, hvorfor de bør håndteres som sådanne og ikke som netop tiltag over for enkeltelementer i systemet. Systemproblemer

Anbefalingerne 1.5, 2.3, 2.4, 3.1, 3.2, og til dels 2.1 og 5.4 går ud på, at uddannelsen af matematiklærere på alle trin, fra grundskole til universitet, indrettes og tilrettelægges sådan, at de kommende lærere forberedes på at bedrive undervisning, der sigter mod at udstyre modtagerne med de foreslåede matematiske kompetencer. Som det fremgår af del III, indebærer dette selvsagt, at lærerne må uddannes til selv at besidde disse kompetencer. Fokus på komp.

Da de forandringer af de forskellige uddannelser af lærere, som det kan give anledning til, kan tage mange forskellige former, bør selve udformningen af uddannelserne i hovedsagen overlades til varetagelse af læreruddannelsesinstitutionerne selv, om end initiativet til forandringer kan komme fra politisk-administrativt hold.

Matematiklærere i grundskolen

Specielt med hensyn til uddannelsen af matematiklærere i grundskolen er situationen den, at mange studerende kun har eller opnår meget beskedne faglige, og dermed også fagdidaktiske, forudsætninger for at kunne varetage de opgaver, som professionen indebærer, jf. del III. I den forbindelse har arbejdsgruppen fundet det fornødent at anbefale – i nr. 1.6 og 5.4 – at kun lærere med faglig pædagogisk uddannelse i matematik varetager undervisning i faget. Det er endnu uklart, i hvilken grad de nylige forandringer af seminarielæreruddannelsens struktur kan stille noget op med dette problem, men det må befrygtes, at de i alle fald vil være utilstrækkelige i forhold til behovet. Kun fagligt-pædagogisk udd. mat.lærere

Om ændringer af forholdene vil kunne indebære mere fundamentale forandringer af læreruddannelsens struktur og organisatoriske placering, må naturligvis undersøges og diskuteres meget grundigt i relevante fora, som selvsagt må indbefatte lærerseminarierne.

Det skal understreges, at der ikke heri ligger nogen anbefaling om enshedsgørelse af grundskolelæreruddannelsen på tværs af de institutioner, som leverer den. Man kan tænke sig adskillige, hver for sig værdifulde, måder at indrette læreruddannelsen på. Vi håber, at man ikke viger tilbage for sådanne diskussioner, på trods af de vanskeligheder, problemer og ubehageligheder, de utvivlsomt vil afstedkomme. Ikke enhedsgørelse

Matematiklærere i de gymnasiale uddannelser

Med hensyn til matematiklærere i ungdomsuddannelserne er variationsbredden så stor, at vi her skal indskrænke os til at se på de gymnasiale uddannelser. Her er problemet kun i mindre grad lærernes matematikfaglige ballast i traditionel forstand (men i nogle tilfælde måske nok deres matematiske kompetencer, som defineret i denne rapport), og sædvanligvis heller ikke deres undervisningsmæssige kompetence i klassisk betydning; den udvikles jo ofte gennem erfaring og praksis. Hovedproblemet er, at en del matematiklærere i de gymnasiale uddannelser har et for beskedent fagdidaktisk beredskab til, at de kan håndtere alle de udfordringer, som stadige forandringer af rammerne, vilkårene og omstændighederne for undervisningen skaber.

Styrkelse af det fagdidaktiske beredskab

Her er der, som det også anbefales, brug for en synlig styrkelse af det fagdidaktiske beredskab ved uddannelsen af lærere til de gymnasiale uddannelser. En sådan styrkelse kan finde sted på mange forskellige måder inden for eller efter universitetsuddannelsen, så længe det holdes for øje, at den fornødne styrkelse ikke kan blive tilstrækkelig, hvis den udelukkende søges opnået gennem undervisningstræning og -praksis eller gennem beskæftigelse med almene didaktiske og pædagogiske spørgsmål.

Ingen harmonisering

Heller ikke her anbefaler vi harmonisering af vejene til at opnå den ønskede fagdidaktiske styrkelse. Mange forskellige veje kan lede til dette mål.

Matematiklærere ved universiteter og andre videregående uddannelser

Hvad sluttelig angår lærere i matematik ved universiteter og andre videregående uddannelser, er hovedproblemet sædvanligvis heller ikke den matematikfaglige ballast (mens der igen, for nogle læreres vedkommende, kan være problemer med matematikkompetencerne som helhed). Problemerne kan derimod være af både fagpædagogisk og fagdidaktisk art.

Fagdidaktisk og -pædagogisk opgradering

En del videregående matematikundervisning finder sted under former, fx forelæsninger for store hold, hvor mange lærere har begrænset direkte kontakt med de studerende, og deraf følgende begrænsede muligheder for løbende konstruktiv feedback på undervisningen. Men også på de videregående uddannelser sker der forandringer af rammer, vilkår og omstændigheder, som gør, at mange læreres fagdidaktiske og -pædagogiske kompetencer bør styrkes betragteligt. Igen bør disse forløb hverken indskrænkes til at omfatte almene didaktiske og pædagogiske spørgsmål eller til at ske gennem praksisøvelser.

Ingen harmonisering

Som tilfældet var for de øvrige læreruddannelser, vil vi naturligvis heller ikke her anbefale nogen form for harmonisering af tiltagene på tværs af enheder eller institutioner.

11.3.7 Anbefalinger vedrørende evaluering og eksamener

En af de vigtigste faktorer for en succesfuld gennemførelse af ethvert (nyt) tiltag i matematikundervisningen er evaluering, såvel løbende evaluering undervejs i undervisningen som prøver og eksamener. I et system, som i øvrigt betjener sig af organiseret evaluering som et hovedmiddel til at overvåge, regulere og kontrollere undervisningen og dens resultater, vil ingen nye tiltag vinde fodfæste hos lærere og elever, hvis ikke de forhold, de angår, gøres til genstand for evaluering. I den forbindelse er det afgørende, at de evalueringsmidler, man vælger at betjene sig af, afspejler de formål og mål, som forfølges i undervisningen, og at de har en passende grad af overensstemmelse med de aktiviteter og arbejdsformer, der benyttes heri.

Harmoni mellem mål, arbejdsformer og evaluering

I den aktuelle matematikundervisning i Danmark er tilfældet det, at der i alle former for evaluering kun sættes fokus på en begrænset del af de matematiske kompetencer, som er identificeret i denne rapport; og i det omfang dette foregår, sker det temmelig indirekte, uden eksplicit afdækning og artikulation af hvilke kompetencer der er i spil.

Imidlertid må de former og instrumenter, der i Danmark traditionelt er til rådighed for læreren til løbende evaluering undervejs i undervisningen, anses for tilsammen at have potentiale til at tillade evaluering af kompetencerne i et ganske stort omgang. Men for at realisere dette potentiale må evalueringsformerne og -instrumenterne efterses, tilpasses og målrettes med henblik på eksplicit at sigte mod identifikation og vurdering af elevers og studerendes besiddelse af de enkelte matematiske kompetencer.

Potentialet i gængse evalueringsformer og -instrumenter

Når det derimod gælder de gængse skriftlige og mundtlige prøve- og eksamensformer og tilhørende instrumenter, som er i brug til evaluering af matematik, har disse kun potentiale til at tillade evaluering af et begrænset udvalg af kompetencerne. Men også her er der brug for undersøgelse, tilpasning og målretning, for at de potentialer, disse former og instrumenter faktisk har, kan komme til udfoldelse til evaluering af kompetencerne. Dette er netop indholdet i anbefalingerne 1.3, 2.5, 3.4 og 6.2.

Undersøgelse og tilretning

Når det gælder de hyppigst anvendte prøve- og eksamensformer og -instrumenter, er det arbejdsgruppens vurdering, at vigtige dele af kompetencerne *ikke* kan indfanges på dækkende og velfunderet vis af de gængse former og instrumenter. Med henblik på at ændre denne situation har vi fremsat anbefalingerne 1.4, 2.6, 3.5, og til dels 1.3 og 6.2, til Undervisningsministeriet og samtlige uddannelsesinstitutioner, fra grundskoler til universiteter, om at igangsætte et arbejde med revision og supplering af de anvendte prøve- og eksamensformer og -instrumenter.

Behov for nyudvikling

Det er her afgørende, at det resulterende evalueringsapparat har den ovenfor omtalte overensstemmelse med undervisningens formål og mål, og med de aktiviteter og arbejdsformer der benyttes i den.

De fremtidige evalueringsformer på de videregående uddannelser kan med fordel være domineret af diverse former for større opgaver med efterfølgende samtale, og med et større islæt af mundtlige eksamener end tilfældet er i dag.

Fokus på større opgaver

11.3.8 Anbefaling vedrørende parthaverne i implementering af KOM-projektets idéer

Medejerskab og entusiasme

Især hos lærerne

Det er flere gange fremhævet i denne rapport, at ingen reformer af matematikundervisningen, heller ikke den her foreslåede, har chance for at blive vellykket – eller for den sags skyld overhovedet at blive til ført ud i livet – hvis ikke de centrale aktører har et rimeligt mål af overbevisning om forehavendets værdi og realisme og føler en passende grad af medejerskab og entusiasme over for det. I forhold til det foreliggende projekt er de centrale aktører matematiklærerne på alle trin samt de planlæggende, administrerede og kontrollerende myndigheder, der har ansvaret for matematikundervisningens rammer og for kontrollen af udbyttet af den.

KOM-projektet og omverdenen

Det er for at opnå det, at projektets leder og sekretær såvel som medlemmer af arbejdsgruppen i løbet af projektperioden har deltaget i et meget betydeligt antal møder, uddannelsesdage, konferencer osv. rundt om i landet for at præsentere og diskutere projektet med praktiserende (og kommende) matematiklærere, samt repræsentanter for uddannelsesmyndighederne på alle trin af uddannelsessystemet, såvel som med en hel del repræsentanter fra andre fagområder. Af samme grund har arbejdsgruppen holdt jævnlige møder med den i indledningen omtalte sparringgruppe, som i tættere form har fulgt projektet med væsentlige kommentarer og forslag. Endelig har projektet været fremlagt og diskuteret af arbejdsgruppens formand ved møder og konferencer i Japan, Sverige, Tyskland og USA, bl.a. med henblik på at teste dets holdbarhed over for international ekspertise.

Fortsat kontakt, dialog og medvirken

Skønt erfaringerne med alle disse kontakter med omverdenen kun kan karakteriseres som særdeles opmuntrende og lovende for projektets videreførelse og implementering, bedømmer vi det ikke desto mindre som afgørende, at der også fremover, i implementationsfasen, holdes udbredt og tæt kontakt og dialog med matematikundervisningens aktører, bl.a. gennem aktiv inddragelse af et stort antal af dem i alle faser af de ovenfor foreslåede arbejds-, udvalgs-, projekt- og uddannelsesaktiviteter. Dette er indholdet i anbefaling 1.8.

Forældrene som alliancepartnere

Blandt de vigtigste parthavere i skolens matematikundervisning er selvsagt eleverne, men også deres forældre. I betragtning af at udviklingen af matematiske kompetencer notorisk er en indsats- og tidskrævende proces for praktisk taget enhver elev, er det afgørende, at skolen på alle niveauer – fra den enkelte lærer over skoleledelse og -bestyrelse til skolemyndighederne – arbejder aktivt for at vinde forståelse hos elever og forældre for denne kendsgerning. Dette er indholdet i anbefaling 5.6.

Naturligvis er det også essentielt, at undervisningen fremstår kyndig, relevant og engagerende for eleverne, men selv den mest inciterende og overbevisende matematikundervisning kan ikke overflødiggøre elevernes eget solide arbejde med faget.

11.3.9 Betragtninger vedrørende de overordnede rammer og strukturer i undervisningssystemet

Det fremgår af det ovenstående, at vi i hovedsagen har afstået fra at fremsætte anbefalinger vedrørende de overordnede rammer og strukturer i undervisningssystemet, skønt disse jo naturligvis har væsentlig indflydelse på mulighederne for at realisere KOM-projektets tanker og idéer. Der er flere grunde til dette valg.

(Næsten) ingen anbefalinger vedrørende uv.systemets struktur

For det første er det næppe realistisk at forestille sig, at et begrænset projekt kan øve indflydelse på vitale uddannelsespolitiske, -strukturelle og -økonomiske anliggender, som rækker langt ud over matematikundervisningen, dennes omfang og udbredelse til trods, og som derfor berører en stor og sammensat skare af interessenter og aktører. Det kunne derfor forekomme futilt, om vi benyttede lejligheden til at fremsætte kommentarer og anbefalinger af meget almen art.

For det andet er det magtpåliggende at slå fast, at væsentlige dele af projektets perspektiver og anbefalinger kan føres ud i livet inden for de eksisterende rammer og strukturer. Således er projektet ikke afhængigt af, at der afsættes flere timer til matematikundervisningen i grundskolen. Heller ikke af, at alle de studerende på de videregående uddannelser, som har brug for matematiske kompetencer, udsættes for et øget volumen af formaliseret matematikundervisning, eller at fremtidens læreruddannelser alle foregår i universitetsregie osv. Naturligvis er der, som det fremgår af denne rapport og af anbefalingerne ovenfor, brug for forandringer, også af mere vidtgående karakter. Men disse fordrer næppe grundlæggende omkalfatringer af hele uddannelsessystemet.

Forbedringer kan realiseres inden for rammerne

På et enkelt punkt vil vi imidlertid bevæge os uden for matematikundervisningens egen horisont og berøre et overordnet strukturelt problem: Det almene gymnasiums indretning. Opbygningen af matematiske kompetencer på dette trin er alt for vigtig til alene at blive overladt til matematikundervisningen. Dette er især essentielt, når det gælder anvendelsen af matematik inden for andre fagområder – hvor modelleringskompetencen står centralt. Her er der både brug for, at matematikundervisningen kan tage problemstillinger op fra andre fag, og at andre fag kan behandle matematikholdige problemstillinger. Dette kræver fagsamarbejde. Imidlertid har systematisk fagsamarbejde ganske dårlige vilkår i det eksisterende valggymnasium, som i praksis stiller sig hindrende i vejen for samarbejdet.

Undtagelse: Gymnasiet

Problemet er ikke udelukkende af betydning internt i gymnasiet. Det spiller også en rolle for studenternes videre skæbne i den matematikforbrugende del af uddannelsessystemet, at deres matematiske kompetencer og disses forbindelser til andre fag er så forskelligartede, som tilfældet er.

Her ville det være ønskeligt med en gymnasiereform, som afskaffer valggymnasiet – "buffetgymnasiet", som det er blevet kaldt – til fordel for et gymnasium, som opererer med gennemtænkte, komponerede fagpakker, der vil muliggøre samarbejde mellem fagene – et "menugymnasium". Dette er indholdet i anbefaling 1.9.

"Menugymnasium" frem for "buffetgymnasium"

Som bekendt kan en sådan reform gøres mere eller mindre vidtgående, rækkende fra en fælles fagpakke for alle, med ingen eller kun få valgmuligheder, over et linjegymnasium med et antal linjer, som hver har en fast fagpakke, til et kombineret linje- og grengymnasium, sådan som man havde det før 1988. Vi skal ikke her fremsætte forslag til, hvilken af disse eller andre udformninger en ny gymnasieordning bør have.

Del VII

Matematiske kompetencer på udvalgte uddannelser

A Introduktion til del VII

Del II af denne rapport indeholdt en generel fremstilling af kompetencer til beskrivelse af matematisk faglighed. Fremstillingen var ledsaget af et antal eksempler på hver kompetence, hentet fra forskellige uddannelsestrin. Hensigten med disse eksempler var udelukkende at illustrere, hvad der nærmere bestemt tænkes på med de enkelte kompetencer, ikke at foreslå præcis de eksempler gjort til genstand for undervisning på nogen af de trin, de kunne referere til. Del III var viet en særlig omtale af uddannelsen af matematiklærere – på flere uddannelsestrin – i kompetencebelysning.

Del II rummede en generel kompetencebeskrivelse

A.1 Om de udvalgte uddannelsestrin

I denne del af rapporten er vi gået et skridt videre, idet vi har forsøgt at behandle de otte matematiske kompetencer og de tre former for overblik og dømmekraft vedrørende matematikken som fagområde på en række udvalgte trin af uddannelsessystemet. Lad det straks være slået fast, at der netop er tale om et udvalg. I princippet kunne vi have ønsket os at gennemføre en behandling af al matematikundervisning i det danske uddannelsessystem under den synsvinkel, der er anlagt i dette projekt. Men det har været en urealistisk stor opgave at gennemføre. I stedet har vi valgt at se nærmere på et mindre antal uddannelsestrin- eller former, under den antagelse og i det håb, at vi derved har kunnet levere tilstrækkelig inspiration til, at lignende behandlinger kunne blive andre trin til del gennem andres indsats.

Her behandles en række udvalgte trin – eksemplarisk

Vi har for det første valgt at behandle grundskolens matematikundervisning (kapitel B). Det kræver næppe særlige argumenter, grundskolens placering og opgaver taget i betragtning. I den forbindelse har vi undladt at give en nærmere omtale af 10. klasse. Når det gælder de gymnasiale uddannelser, har vi fokuseret på det almene gymnasium (kapitel D). Men det er vores opfattelse, at helt parallelle betragtninger kan gøres gældende – *mutatis mutandis* – for de øvrige gymnasiale uddannelser, HTX, HHX og hf. Vi har også fundet det vigtigt at gå nærmere ind på universitetsuddannelser i og med matematik, men også der har vi måttet begrænse os, ikke mindst fordi spektret af universitetsuddannelser, der betjener sig af matematiske kompetencer, er meget bredt og sammensat. Valget er derfor faldet på en nærmere omtale af universitetsuddannelserne i matematiske fag (kapitel H). Igen er det håbet, at denne rapport rummer tilstrækkelig inspiration til at anskue

Dels udsnit af det almene uddannelsessystem matematikundervisningen ved fx fysik-, ingeniør-, biologi-, økonomi-, geofags- og psykologistudierne m.m.m. i et analogt lys.

Normativ anvendelse af kompetencerne

Fælles for de nævnte uddannelsestrin og -former (og tillige for uddannelserne til lærer i matematik) er en normativ anvendelse af kompetencebetragtningerne. Det vil sige, at vi har forsøgt at tegne et billede af, hvad det, for os at se, vil være *ønskeligt* at stræbe efter på de pågældende trin. Det lægger op til forskellige slags forandringer – større eller mindre – for indretningen, tilrettelæggelsen og gennemførelsen af undervisningen på de berørte trin. Karakteren af nogle af disse forandringer kommer til udtryk i de anbefalinger, vi har fremsat i kapitel 11. Andre forandringer – og ikke de mindst vigtige – knytter sig til undervisnings- og evalueringspraksis.

Dels et udvalg af erhvervsorienterede uddannelser

Men vi er ikke standset ved uddannelserne i uddannelsessystemets "almene hovedvej". En ganske betragtelig del af de matematikkompetencer, som efterspørges og udnyttes i samfundet, udøves i forhold til en lang række uddannelser, fra erhvervsuddannelser til korte og mellemlange videregående uddannelser, og i kortuddannede voksnes liv i samfundet og på arbejdspladsen. Vi har derfor udvalgt et mindre antal af sådanne uddannelser for – for det første – at vise, hvordan de pågældende uddannelser faktisk forudsætter og trækker på, eller sigter mod, at bibringe deres elever og studerende matematiske kompetencer, også selv om matematikundervisning ikke altid er formelt programsat i disse uddannelser. For det andet har det været ambitionen at antyde, hvordan man kan have fordel af kompetencebetragtninger, når man indretter og beskriver de pågældende uddannelser. Endelig har det været hensigten og – atter engang – håbet, at andre uddannelser kunne overveje at betjene sig af tilsvarende tankegange i fastlæggelsen og karakteriseringen af de matematiske kompetencer, de opererer med.

Spektrum fra næsten ingen til megen matematik

Valget er først faldet på voksenuddannelserne AVU og FVU på grundskoleniveau (kapitel C), som danner en slags overgang mellem "hovedvejen" i det almene uddannelsessystem og de uddannelser, som i højere grad forbereder til diverse slags erhverv. Dernæst har vi valgt gastronomuddannelsen (kapitel E) som et eksempel på en erhvervsuddannelse uden noget udtrykkeligt indhold af matematik, men i realiteten med et ikke-forsvindende islæt af matematiske kompetencer. I den anden ende af spektret har vi elektrikeruddannelsen (kapitel F), der ikke alene inkluderer åbenbare matematiske elementer, men også rummer undervisning af et eksplicit matematisk indhold. Endelig har vi, som repræsentant for en kortere videregående uddannelse der i flere henseender involverer matematiske kompetencer, valgt datamatikeruddannelsen (kapitel G).

Deskriptiv anvendelse af kompetencerne

Til forskel fra hvad tilfældet er med den førnævnte klasse af uddannelser, hvor vi har anlagt et normativt sysnpunkt, har vi for de netop nævnte uddannelser anlagt et deskriptivt synspunkt. Vi har med andre ord ikke forsøgt at tage stilling til, hvordan disse uddannelser bør indrettes i henseende til matematiske komponenter, men har snarere set det som vores opgave at bringe de matematiske kompetencer, de faktisk rummer og trækker på, frem i lyset.

A.2 Læsevejledning

Kapitlerne i denne del af rapporten skal betragtes som *parallelle* i den forstand, at hver af dem kan læses uafhængigt af de andre. Hvad det angår, afviger denne del fra resten af rapporten, hvor der – som det forhåbentlig fremgår – er tale om, at rækkefølgen af kapitler udtrykker en analytisk udvikling. Det er for at markere denne forskel, at kapitlerne her er betegnet med et bogstav, og ikke et nummer, i forlængelse af de øvrige kapitler.

Kapitlerne her er "parallelle"

At kapitlerne kan læses uafhængigt af de andre, skal ikke forstås som en opfordring til at gøre det. Det er således arbejdsgruppens opfattelse, at personer med særlig interesse for et undervisningstrin vil kunne få dette trin belyst ved at sammenholde det med beskrivelserne på andre trin. Det er jo en af hovedopgaverne for KOM-projektet at bidrage til at skabe sammenhæng på langs og tværs i uddannelsessystemet. Dertil kommer, at der er inspiration at overføre, ikke mindst fra eksemplerne, fra et trin til et andet.

Givende at læse dem alle

Alle kapitlerne her bør læses i sammenhæng med fremstillingen af matematisk kompetence i kapitel 4, som der på flere måder tages afsæt i og refereres til. Med udgangspunkt i den tilsvarende grundkarakteristik i kapitel 4, er *karakteristikkerne* i denne afsluttende del af rapporten således et bud på *dækningsgraden* af hver kompetence på de respektive uddannelser, jf. afsnit 4.4.4 og 9.3. For at tilgodese ønsket om at illustrere kompetencetilgangens potentiale som sammenhængsskabende beskrivelsesværktøj, er de fleste karakteristikafsnit bevidst gentagende mht. formuleringer. De dele af grundkarakteristikkerne, der ikke er skønnet relevante på de respektive uddannelser, er simpelthen udeladt. Eksempelvis er der hverken i forbindelse med gastronom- eller datamatikeruddannelsen nogen omtale af de tre former for overblik og dømmekraft, fordi de ikke vurderes som værende af selvstændig relevans for disse uddannelser.

Reference til kapitel 4

Karakteristikkerne

Hvad angår *kommentarerne til karakteristikkerne*, er den del, som handler om at belyse afgrænsningen af kompetencerne over for hinanden, af pladshensyn udeladt i hele denne sidste del af rapporten, skønt sådanne kommentarer naturligvis fortsat er fuldt relevante. Også her vil vi henvise til de almene kommentarer i kapitel 4.

Kommentarerne

Endelig skal det for alle de uddannelser, vi omtaler i denne del af rapporten, understreges, at *de anførte eksempler* grundlæggende er forsøgt valgt og udformet med tanke på deres illustrationskraft i forhold til de mere abstrakte karakteristikafsnit. Der er altså ikke tale om et forsøg på at foreslå netop de valgte eksempler sat på dagsordenen for undervisningen på de behandlede uddannelser. I kapitlerne B, C og D, hvor flere uddannelsestrin karakteriseres under et, bruges eksemplerne bl.a. til at illustrere progression i kompetencebesiddelsen mht. aktionsradius og teknisk niveau. At vi i de tre nævnte kapitler har tilføjet eksemplificeringen disse dimensioner, skulle gerne sætte en streg under, at den progression i dækningsgrad, som er indbygget i karakteristikafsnittene, kun udgør en af tre dimensioner i en persons besiddelse af en given kompetence, jf. afsnit 4.4.4.

Eksemplerne valgt med henblik på at forklare og illustrere karakteristikken

I kapitlerne B, C og D illustreres bl.a. progression

På grund af den fælles strukturering af kapitlerne i denne del af rapporten, som kommer til udtryk i afsnitsinddelingen, har vi valgt at undlade at komme med marginkommentarer i de efterfølgende kapitler.

B Grundskolen

B.1 Generelle kommentarer

Grundskolen er et langstrakt og aldersmæssigt tidligt placeret uddannelsesforløb, hvor eleverne, i løbet af de år de er der, gennemgår en personlig udvikling, som ikke kan sidestilles med nogen anden uddannelse. Det vil derfor – uanset hvilke analytiske "briller" man har på – kun på et meget overordnet plan være meningsfuldt at lave en samlet karakteristik af forløbet, hvilket vi for at kunne komme ned under "overfladen" derfor vil undlade. I karakteristikken her kommer de enkelte kompetencer således til udtryk og er afgrænset på en måde, der er tilpasset de alders- og undervisningstrin, grundskolen favner. Det indebærer både, at det ofte kun er visse træk ved den enkelte kompetence, vi vurderer som relevante på de forskellige trin, og at selve formuleringen af kompetencerne tager hensyn til trinnet.

Vi har dog af flere grunde bevidst afstået fra at forsøge at karakterisere, hvordan kompetencerne kan komme til udtryk på det enkelte klassetrin. Dels ville det give et falsk indtryk af homogenitet i elevgruppen på det enkelte klassetrin, dels ville det sende et utilsigtet og forkert signal om, at jo mere fintmasket og detaljeret en karakteristik man kan lave, jo bedre.

I forsøget på at finde en balance mellem en meget overordnet, og derfor meget lidt handlingsorienteret, karakteristik på den ene side, og en urimeligt atomiseret karakteristik på den anden side, har vi valgt at følge traditionen og gennemføre kompetencebeskrivelsen af matematikindervisningen i grundskolen gennem tre udviklingstrin: Begyndertrinnet (1.–3. klassetrin), mellemtrinnet (4.–6. klassetrin) og afsluttende trin (7.–9. klassetrin).

B.1.1 Afgrænsning af karakteristikkerne her i forhold til grundkarakteristikken

I fremstillingerne nedenfor er omdrejningspunktet en fremadrettet *karakteristik* af, hvad det, hvad dækningsgraden angår, efter vores mening er rimeligt at have som sigtepunkt på hver af de tre trin i forhold til arbejdet med hver af kompetencerne. For at gøre det nemmere at sammenholde karakteristikken af grundskolen med omtalen af kompetencerne i kapitel 4 vil vi her kort sammenfatte, hvordan hver af kompetencerne er *afgrænset* i forhold til grundkarakteristikken i kapitel 4.

Tankegangskompetencen er for grundskolen som helhed kun dækningsgradsmæssigt afgrænset i forhold til grundkarakteristikken ved ikke at omfatte abstraktion af egenskaber i matematiske begreber. På mellemtrinnet og ned omfatter karakteristikken ikke generalisering af matematiske resultater, ligesom der kun fordres en lejlighedsvis aktiv skelnen mellem definitioner og sætninger, ikke en mere udbygget og detaljeret forståelse af forskellen mellem forskellige slags udsagn og deres status. På begyndertrinnet omfatter karakteristikken kun passiv skelnen mellem definitioner og sætninger.

Problembehandlingskompetencen er for grundskolen som helhed ikke afgrænset i forhold til grundkarakteristikken, hvad dækningsgrad angår. På mellemtrinnet og ned er der to elementer af grundkarakteristikken, der ikke stresses: Dels det at kunne afgrænse og præcisere matematiske problemer, dels det at kunne løse matematiske problemer på forskellige måder.

Heller ikke *modelleringskompetencen* er for grundskolen som helhed afgrænset i forhold til grundkarakteristikken, hvad dækningsgrad angår. På mellemtrinnet forventes kun i begrænset omfang evne til at kunne styre den samlede modelleringsproces. På begyndertrinnet optræder hverken afmatematisering af matematiske modeller eller strukturering, kritisk analyse, og ej heller det at have overblik over og kunne styre aktive modelleringsprocesser.

Når det gælder *ræsonnementskompetencen* indgår det at kunne afdække de bærende idéer i et matematisk bevis ikke i grundskolen. Et par forhold vedrørende forbindelsen mellem ræsonnementer generelt og matematiske beviser som specialtilfælde indgår kun i karakteristikken i form af en forventning om eksemplariske erfaringer. Det er tilfældet med hensyn til det at vide og forstå, hvad et matematisk bevis er, samt det at kunne omforme heuristiske ræsonnementer til egentlige (gyldige) beviser. På mellemtrinnet og ned omfatter karakteristikken ikke det at kunne bedømme et matematisk ræsonnement, kun at kunne følge og forholde sig til et sådant.

Repræsentationskompetencen er i forhold til grundkarakteristikken bevaret i sin fulde form gennem hele grundskolen, bortset fra at kendskab til styrker og svagheder ved forskellige repræsentationsformer ikke eksplicit er på dagsordenen på begyndertrinnet.

Symbol- og formalismekompetencen afgrænses i forhold til grundkarakteristikken dels ved ikke at inkludere en forventning om indsigt i – kun kendskab til – karakteren af og "spillereglerne" for formelle matematiske systemer, dels ved ikke at betone, at omgangen med sådanne systemer typisk handler om at forholde sig til aksiomatiske teorier. På mellemtrinnet og ned optræder fordringen om at beskæftige sig med formelle matematiske systemer slet ikke i karakteristikken. På begyndertrinnet er ikke inkluderet en fordring om at beskæftigelsen med symbolholdige udsagn også omfatter formler.

Kommunikationskompetencen er bevaret uafgrænset gennem hele grundskolen med undtagelse af, at man på begyndertrinnet ikke behøver at kunne udtrykke sig på flere forskellige måder om matematikholdige anliggender.

Også *hjælpemiddelkompetencen* er bevaret uafgrænset gennem hele grundskolen, bortset fra at det ikke forudsættes, at eleverne på begyndertrinnet opnår artikuleret kendskab til hjælpemidlernes begrænsninger.

Hvad sluttelig angår *de tre former for overblik og dømmekraft* vedrørende matematik som fag, er de ikke afgrænsede i forhold til grundkarakteristikkernes påpegning af de respektive genstandsfelter. Afgrænsningen ligger i, at eleverne kun forventes at få erfaringer af orienterende og alment diskuterende karakter, og – med undtagelse af anvendelsesmæssigt overblik og dømmekraft – kun eksplicit adresseret på afsluttende trin.

B.1.2 Læsevejledning

Karakteristikken i dette kapitel er *normativ*. Det betyder, at man som læser hverken skal se det som vores bud på "tingenes tilstand", eller som noget man med rimelighed kunne forvente af eleverne her og nu. Karakteristikken gælder, hvad det, efter vores mening, er fornuftigt og realistisk at sætte op som pejlemærker for grundskolens matematikundervisning, i en tænkt fremtidig situation, hvor det almene uddannelsessystem, hvad matematikundervisningen angår, er reformeret i overensstemmelse med anbefalingerne i kapitel 11.

For den faktiske undervisning i grundskolen vil de otte kompetencer i ret høj grad være sammenvævede, faktisk i en grad, så de i praksis kan være svære at skille ad. Jo tidligere i skoleforløbet man befinder sig, jo mere vil det høre til sjældenhederne, at matematiske begreber og fænomener på dette trin optræder i "ren" form, dvs. uden forbindelse med børnenes livsverden. Alligevel er det vigtigt for klarhedens skyld at fastholde, at kompetencerne er analytisk forskellige.

Hvad angår *karakteristikken* af hver af kompetencerne, er det gennemgående, at der er mange elementer, som er gennemgående på hver af de tre grundskoletrin. Det skal tages som et positivt signal om, at det grundlæggende er en og samme kompetence, som videreudvikles, og altså ikke som et signal om, at eleverne ikke forventes at udvikle sig på disse områder.

Eksemplificeringen er iøvrigt generelt mest fyldig på begyndertrinnet, dels fordi det er med dette trin, at kompetencekarakteristikkerne udspændes nedadtil både alders- og niveaumæssigt, dels fordi vi har erfaring for, at det er på dette trin, det volder størst vanskeligheder umiddelbart at se kompetencernes manifestation for sig.

B.2 Matematiske kompetencer i grundskolen

B.2.1 Tankegangskompetence

Karakteristik

Gennem hele grundskolen består dennne kompetence i at kunne udøve matematisk tankegang i forhold til elementær matematik, dvs. grundbegreberne for størrelser, tal og rum, som de kommer i spil, i forhold til den verden de respektive aldersgrupper befinder sig i. Udfoldet drejer det sig dels om at kunne *stille spørgsmål, som er karakteristiske for elementær matematik*, og at *have blik for hvilke typer af svar*, som kan komme på tale, dels om at kunne *skelne passivt mellem forskellige slags matematiske udsagn* som del af forståelsen af, hvilke typer svar som kan opnås på spørgsmål vedrørende elementær matematik. Hovedvægten ligger her på at kunne skelne mellem på den ene side *definitioner*, forstået som en aftale om tildeling af navne til ting, og på den anden side *sætninger*, forstået som påstande i form af alment gældende resultater og regler.

Af særlig betydning er her forståelsen af *betingede udsagn*. I denne skelnen indgår også det at have blik for betydningen af underforståede eller udtrykkelige kvantorer i matematiske udsagn ("Der findes en... med den egenskab at...", "For alle ... gælder..."). Også det at kunne skelne sætninger fra påstande om enkelttilfælde, og fra formodninger baseret på intuition eller erfaringer med specialtilfælde, hører hjemme her.

Fra mellemtrinnet og frem bør der ske en gradvis udvikling i forhold til, hvor *aktivt* der kan skelnes mellem forskellige slags matematiske udsagn. Herudover øges forventningerne ved at tilføje karakteristikken det at kunne *udøve kendskab til givne matematiske begrebers rækkevidde* som en anden del af forståelsen af, hvilke typer svar som kan opnås på spørgsmål vedrørende elementær matematik.

På afsluttende trin bør man forvente, at dækningsgraden udvides til, ud over rækkevidden af de centrale matematiske begreber, også at omfatte kendskab til disse begrebers *begrænsning*. Desuden tilføjes karakteristikken det at *være klar, over hvilke slags spørgsmål som er karakteristiske* for elementær matematik som udtryk for en øget bevidsthed omkring det at kunne stille sådanne spørgsmål og have blik for typen af svar. På dette trin indgår også det at *kunne forstå, hvad der ligger i generalisering af matematiske resultater* og selv at kunne generalisere sådanne til at omfatte en større klasse af objekter.

Kommentar

At elever i grundskolen kan udøve matematisk tankegang som her beskrevet, indebærer ikke, at de også er i stand til at udtrykke, hvori denne tankegang består eller at kunne gøre rede for de forskellige former for skelnen, som indgår heri. Selvfølgelig er det heller ikke et spørgsmål om at have kendskab til den terminologi, som her er benyttet. I stedet er der tale om, at eleverne i praksis kan forholde sig til og betjene sig af de vigtigste ingredienser i en sådan tankegang i de matematiske sammenhænge, de støder på.

Der kan også være grund til at understrege, at det at være i stand til at stille matematiske spørgsmål, som er karakteristiske for de respektive trin, ikke nødvendigvis indebærer, at man også kan besvare dem.

Eksemplificering

Med formuleringen om at kunne *stille spørgsmål, som er karakteristiske for elementær matematik*, tænkes her på spørgsmål af typen “Findes der. . . ?”, “Hvor mange. . . ?”, “Hvad betyder. . . ?”, “Hvad kaldes. . . ?” osv.

I forbindelse med det at *have blik for hvilke typer af svar*, som kan komme på tale, tænkes på svar af typen “Der findes. . . (fordi). . . ”, “Der findes ikke . . . (fordi). . . ”, “Så mange. . . ”, “Det bliver. . . ”, “Det betyder. . . ”, “Det kaldes. . . ” osv.

Med hensyn til forståelsen af *betingede udsagn* tænkes på udsagn af typen “Hvis. . . så. . . ”, “Hvis ikke. . . så. . . ”, “Kun når. . . er. . . ”, “På betingelse af. . . kan man sige at. . . ” osv.

Til illustration af matematisk tankegangskompetence kan nævnes det at have blik for typen af svar på, og selv kunne stille, konkrete *karakteristiske spørgsmål* som

B “Findes der noget helt tal, som er både lige og ulige?”

B “Findes der et tal, som er verdens største? . . . eller mindste?”

B “Hvor langt kan man tælle?”

B “Hvor meget er egentlig en kilometer?”

B “Er der mon flere ulige tal end lige tal?”

B “Hvor meget er 406 større end 317?”

B “Hvor meget bliver $100 \cdot 100$?”

B “Hvad betyder egentlig 317?”

B “Hvad betyder det, når der står 0 i 406?”

B “Hvorfor skriver man ikke 0406 i skolen, når mit personnummer ender på 0406?”

B “Hvad er en kvadratcentimeter?”

B “Hvad er det nu, vi mener med et kvadrat?”

B “Er der flere stole end borde i klassen?”

B “Hvilken klasse på skolen har flest elever?”

B “Hvis man har sparet $312,75$ kr. op og vil købe en ting til $450,50$ kr., hvor meget mangler man så?”

B “Når et menneske ikke kan tælle til mere end 3 milliarder på 100 år, hvordan kan vi så vide at der bor 6 milliarder mennesker på Jorden, når ingen har talt dem?”

M “Findes der noget helt tal, som er både lige og ulige?”

M “Hvad kalder man en firkant, hvor både vinkler og sider alle er lige store?”

M “Hvorfor er $0,10$ mindre end $0,9$, når der er flest cifre i $0,10$?”

M “Findes der et lige primtal?”

M “Hvad sker der med størrelsen på en vinkel, hvis vinkelbenene forlænges?”

M “Hvad betyder procent?”

M “Hvad er en ligning?”

A “Hvorfor må man ikke dividere med 0?”

A “Skal man altid bruge den samme værdi af π, når man skal beregne arealet af en cirkel, uanset cirklens størrelse?”

A “Hvorfor giver minus gange minus plus?”

A “Hvorfor kan man ikke tage kvadratroden af et negativt tal?”

A “Hvorfor er $2^0 = 1$ – når man ganger 2 med sig selv 0 gange, skulle det da blive 0?”

A “$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, siger du, men hvorfor er der kun to led, der skulle da blive fire?”

Der kan være grund til at pege på, at selv om nogle af disse spørgsmål refererer til verden uden for matematikken, er selve spørgsmålene alle af matematisk art, og de processer, som skal til for at svare på dem, er det i alt væsentligt også, selv om de skal bringes i spil over for et udenomsmatematisk virkelighedsområde. At tælle bordene og stolene i klassen, eller eleverne i skolens klasser, kræver selvfølgelig, at man forholder sig til de konkrete stole og borde, respektive elever, men selve tælleprocessen er af matematisk natur, selv om den angår virkelige genstande. Ligeså forholder det sig, hvis man i stedet for at tælle borde og stole fx parrer dem sammen, indtil én eller begge kategorier er udtømt, og derefter svarer på spørgsmålet “Er der flere stole end borde i klassen?” ved at sige “Ja, for jeg har sat hvert bord sammen med en stol, og bagefter var der stole tilovers”.

Eksempler på forskellige slags matematiske udsagn som alle er *definitioner*, eller instanser heraf, kunne være

B “Et (helt) tal, som ikke kan deles i to lige store tal, kaldes ulige.”

B “Tallet, der skrives som 406, består af fire hundreder og 6 enere.”

B “En firkant er en figur, som har fire kanter.”

B “Symmetri er, når ting kan spejles i sig selv.”

M “Et helt tal, som ikke kan deles i to lige store tal, er ulige.”

M “Et kvadrat er en firkant, hvor alle vinkler og alle sider er lige store.”

M “En variabel kan have flere forskellige værdier.”

M “En ligning siger noget om balancen mellem to talstørrelser – ligesom en vippe.”

A “En funktion angiver sammenhængen mellem to variable.”

A “Et irrationalt tal kan ikke skrives som en brøk.”

A “Rumfang siger noget om, hvor meget ting i tre dimensioner fylder.”

Som eksempler på *sætninger* (som ikke nødvendigvis kan/skal doceres eller godtgøres på det pågældende trin) har vi:

B “De (hele) tal, der er lige, er præcis dem, der ender på et lige tal.”

B “Hvis man deler en firkant med en linje gennem to (modstående) hjørner, får man altid to trekanter.”

B “Hvis man lægger to tal sammen, bliver resultatet større end begge tallene.”

B “Et lige tal plus et ulige tal giver altid et ulige tal.”

M “Hvis man ganger to ulige tal med hinanden, får man altid et ulige tal som resultat.”

M “Hvis man laver en figur af kvadrater med sidelængden 1, bliver omkredsen altid et lige tal.”

M “36 er et eksempel på et kvadrattal, men ikke alle tal er kvadrattal.”

M “En ligning har altid én løsning.”

A “Funktioner kan altid tegnes i et koordinatsystem.”

A “Rationale tal er den talmængde med flest elementer.”

A “Når rumfanget af noget bliver større, bliver overfladearealet også større.”

Derimod er følgende eksempler på *påstande om enkelttilfælde*, som skal generaliseres i større eller mindre grad for at blive til sætninger.

B “12 er et lige tal.”

B “En kilometer er lige så meget som 10 løbebaner på 100 meter, lagt lige efter hinanden.”

M “At gange 10 med $\frac{1}{2}$ er det samme som at dividere 10 med 2.”

M “En liter er lige så meget som 1000 cm^3.”

A “Ligningen $2x + \frac{x}{2} = 2$ har kun én løsning.”

A “$\sqrt{8}$ er et irrationalt tal.”

B.2.2 Problembehandlingskompetence

Karakteristik

Gennem hele grundskolen består dennne kompetence dels i at kunne *finde og formulere* forskellige slags elementære matematiske problemer, “rene” såvel som “anvendte”, “åbne” såvel som “lukkede”, dels i at kunne *løse* sådanne matematiske problemer i færdigformuleret form, egnes såvel som andres.

På afsluttende trin, og gradvist på vej hertil, udvides den forventede dækningsgrad på to områder: For det første forventes det, at eleverne udvikler deres evne til at *opstille* forskellige slags elementære matematiske problemer, så de udover at kunne finde og formulere sådanne problemer også kan *afgrænse og præcisere* dem. For det andet skal eleverne udvikle sig i retning af at kunne *løse* færdigformulerede problemer *på forskellige måder*, hvis det er klargørende eller af andre grunde ønskeligt.

Kommentar

Et matematisk problem er en særlig type matematisk spørgsmål, nemlig ét hvor en matematisk undersøgelse er nødvendig for besvarelsen. Spørgsmål, som kan besvares alene ved hjælp af (få) specifikke rutinefærdigheder, henregnes således ikke som matematiske problemer.

Det er meget vel muligt at kunne formulere matematiske problemer uden at være i stand til at løse dem. Tilsvarende er det muligt at være en dygtig problemløser uden at være god til at finde og formulere matematiske problemer.

Eksemplificering

Som eksempel på det at *løse*, og i nogle af tilfældene eventuelt selv *finde og formulere*, matematiske problemer, vil vi – i den "lukkede" afdeling, hvor der eksisterer ét entydigt rigtigt svar – nævne følgende:

B "Findes der noget helt tal, som er både lige og ulige? – Nej, for et lige tal er ét, som kan deles i to lige store hele tal, og med et ulige tal mener vi ét, som ikke kan deles på denne måde."

B "Findes der et tal, som er verdens største? – Nej, for hvis nogen kom med et forslag til et sådant tal, ville dette tal plus 1 være endnu større."

B "Eller mindste? – Ja, blandt de (hele) tal I kender, er 0 mindst, men der findes nogle andre slags tal, hvor der ikke er noget mindste."

B "Hvis en plade chokolade er opdelt i $3 \cdot 4$ ens stykker, kan den så deles mellem fem mennesker, så alle får lige meget? – Nej, for man kan ikke gange 5 med et tal og så få 12."

B "Er der mon flere ulige tal end lige tal? – Nej, der må være lige mange, for vi kan parre hvert ulige tal sammen med præcis et lige tal, fx det som kommer umiddelbart efter." (Dette er et eksempel på et svar, som næppe opnås på dette trin, selv om spørgsmålet sagtens kan stilles her.)

B "Hvor meget er 406 større end 317? – 89."

B "Kan man altid lave en trekant af tre pinde? – Nej, for hvis vi fx har pinde på 3, 5 og 10 cm og lægger de to små pinde op til hver sin ende af den store pind, kan de to små pinde aldrig mødes."

B "Hvor meget bliver $100 \cdot 100$? – 10000."

B "Er der flere stole end borde i klassen? – Ja, for jeg har talt 13 borde, men 25 stole."

B “Hvilken klasse på skolen har flest elever? – Først besluttede vi, at det skulle være alle dem, der går i klassen, vi skulle have med, ikke kun dem, der var i skole den dag. Derfor spurgte vi efter tallene på kontoret og sammenlignede dem. Så opdagede vi, at 2a, 3c og 7b alle har 23 elever, mens de andre har færre. Så alle de tre klasser må have flest elever.”

B “Er der lige mange sorte og hvide felter på et skakbræt? – Ja, for på hver række er der 4 sorte og 4 hvide.”

B “Hvis man har sparet $312,75$ kr. op og vil købe en ting til $450,50$ kr., hvor meget mangler man så? – Hvis tingen kostede $450,75$ kr. så manglede man 138 kr.; men den koster 25 øre mindre, så det er kun $137,75$ kr., man mangler.”

M “Hvor mange løsninger har ligningen $2 - x^2 = 3$? – Ingen.”

M “Arne, Bent og Clara skal beslutte, hvem der skal vaske op. De kaster to mønter. Arne skal vaske op, hvis udfaldet bliver plat-plat; Bent, hvis udfaldet bliver krone-krone; og Clara, hvis udfaldet bliver en plat og en krone. Er det retfærdigt? – Nej, fordi Clara vil komme til at vaske op dobbelt så mange gange som de andre.”

M “ Hvad er det næste tal i talfølgen $0,2;\ 0,4;\ 0,6;\ 0,8;\ \ldots$? – $1,0$.”

M “Hvor mange bedstemødre er der i X-købing, hvis halvdelen af de 10000 indbyggere er hunkøn, og 8% af dem er bedstemødre? – 400.”

A “Hvad kan omkredsen af figuren her blive, hvis man tilføjer yderligere to kvadrater af sammme størrelse? – Det må komme an på, hvordan de nye kvadrater må ligge. Hvis de skal have mindst en side fælles med figuren, så...”

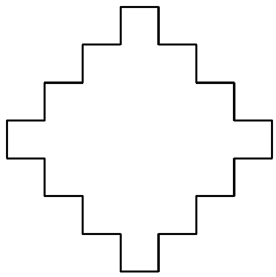
A “Hvor store er vinklerne i en regulær trekant? firkant? n-kant? – Med trekanten må svaret være 60°, fordi de tre lige store vinkler lagt sammen skal give 180°. En regulær firkant er retvinklet, så her er svaret altså 90°. n-kant, ... Hmmm, det må være noget med, hvor meget de n vinkler er tilsammen, men herfra skal jeg nok have hjælp for at komme videre.”

A “Hvad er forholdet mellem arealet af en cirkels indskrevne og omskrevne kvadrat?”

A “Under udsalg får man ofte rabat som en procentdel af varens normale pris. Er det smartest at bede om at få rabatten trukket fra før eller efter momsen lægges til prisen? – Det må være lige meget, tror jeg, for det er det med alle de tal, jeg har prøvet med.”

A “Hvis man til et tal lægger et bestemt antal procent, og derefter trækker det samme antal procent fra resultatet, ender man ikke med det tal, man startede med. Hvorfor ikke?”

A “Hvad er arealet af figuren her, hvis omkredsen er 56? – 100.”



Det fremgår, at nogle af problemerne er af internt matematisk art, dvs. alene angår tal- eller størrelsesbegreber eller geometriske begreber om rummet (inklusive planen), mens andre refererer til genstande og fænomener fra verden uden for matematikken. De udenomsmatematiske problemer er (jf. kommentaren i afsnit 4.2.2) rubriceret under denne kompetence og ikke under modelleringskompetencen, fordi løsningen af dem ikke forudsætter hypoteser om og afgrænsning af det virkelighedsudsnit, der er tale om.

I den mere mere “åbne” afdeling, hvor det vil være selvmodsigende at anvise et kort og entydigt svar, kan følgende “rene” opgaver tjene som eksempler:

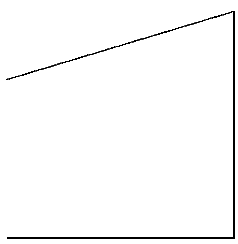
B “Skriv tre forskellige regnestykker, som du mener giver 100 som resultat, og lad en kammerat regne efter.”

B “Tegn tre forskellige geometriske figurer, som alle har omkredsen 10 cm, og lad en kammerat måle efter.”

M “Hvilke figurer kan der fremkomme, hvis to spejle samles og stilles lodret på en ret linje, og derefter åbnes i forskellige vinkler?”

M “Skriv tre forskellige ligninger, som du mener har 5 som løsning, og lad en kammerat regne efter.”

M “Kom med en ‘opskrift’ på, hvordan man kan færdiggøre den påbegyndte trekant her.”



A “Hvilke figurer kan have frembragt skyggerne her?” (Foto af forskellige skarpt optegnede skygger.)

A “Skriv regneforskriften for tre forskellige funktioner, hvis graf du mener går igennem punktet $(5;7)$, og lad en kammerat tjekke efter.”

A “Find så mange rektangler som muligt som opfylder, at

a) længden og bredden er hele tal.

b) arealet og omkredsen er samme tal.”

A “Opskriv $\frac{1}{7}$ som sum af to eller flere stambrøker (dvs. brøker hvis nævner er 1).”

Hvad angår opgaver, som kan karakteriseres som “åbne” og “anvendte”, har udfordringen en karakter, som gør, at det i første omgang er modelleringskompetence, som skal bringes i spil, jf. kommentarerne til nedenstående afsnit, som også rummer adskillige eksempler.

B.2.3 Modelleringskompetence

Karakteristik

Gennem hele grundskolen består denne kompetence på den ene side i at kunne *analysere* grundlaget for og egenskaberne ved foreliggende modeller og at kunne bedømme deres rækkevidde og holdbarhed. På den anden side består kompetencen i at kunne *udføre aktiv modelbygning* i en given sammenhæng, dvs. at bringe elementær matematik i spil og anvendelse til behandling af anliggender uden for matematikken selv.

Aktiv modelbygning indeholder en række forskellige elementer. Først at kunne *strukturere* det felt eller den situation der skal modelleres. Dernæst at kunne gennemføre en *matematisering* heraf, dvs. en oversættelse af objekter, relationer, problemstillinger m.v. til et område af matematikken, resulterende i en matematisk model. At kunne *behandle* den opståede model, herunder løse de matematiske problemer den måtte give anledning til, samt at kunne *validere* den færdige model, dvs. bedømme dens holdbarhed både internt (i forhold til modellens matematiske egenskaber) og eksternt (dvs. i forhold til det felt og den situation modellen omhandler). Der indgår tillige at kunne *analysere modellen kritisk*, både i forhold til dens egen brugbarhed og relevans og i forhold til mulige alternative modeller, og at kunne *kommunikere* med andre om modellen og dens resultater. Endelig indgår det i aktiv modelbygning at have *overblik* over og kunne *styre* den samlede modelleringsproces.

I forhold til denne model af den matematiske modelleringsproces bør den aktive modelbygning *på begyndertrinnet* bestå i delprocesserne *matematisering*, *behandling* af den opståede model, som på dette trin oftest vil være et anvendt regnestykke eller en tænkt, tegnet eller bygget geometrisk genstand, *validering* af den færdige model, hvilket her kommer ud på at tage stilling til, om de opnåede resultater af modelbehandlingen ser rimelige ud og giver anledning til brugbare konklusioner i lyset af de tilskæringer af og antagelser om feltet/situationen, som er foretaget, samt *kommunikation* med andre om modellen og dens resultater, hvilket på dette trin i hovedsagen består i at vise og forklare, hvad man har gjort, samt at svare på spørgsmål og indvendinger herom.

Fra mellemtrinnet og frem fordres dækningsgraden udvidet til også at inkludere *kritisk analyse* af de byggede modeller samt *overblik* over den gennemførte del af modelleringsprocessen. Desuden bør den del af aktiv modelbygning, der handler om *strukturering*, gradvist inddrages mere og mere fra dette trin og frem. Den del af modelleringskompetencen, der handler om analysen af grundlaget for og egenskaberne ved foreliggende modeller, bør fra mellemtrinnet og frem i stigende grad inkludere det at "*afmatematisere*" (træk ved) foreliggende matematiske modeller, dvs. at kunne afkode og fortolke modelelementer og -resultater i forhold til det felt eller den situation, som er modelleret.

På afsluttende trin bør såvel den undersøgende som den produktive side af modelleringskompetencen inkludere alle dele af den matematiske modelleringsproces.

Kommentar

Selv om der teoretisk set er tale om matematisk modeldannelse eller -bygning, hver gang matematikken bringes i spil uden for dens eget område, vil vi her kun bruge ordene model og modelbygning i tilfælde, hvor der optræder en ikke-selvfølgelig tilskæring af den modellerede situation, som indebærer beslutninger, antagelser, indsamling af oplysninger og data m.v.

Behandling af matematikholdige problemstillinger, som ikke for alvor kræver bearbejdning af de virkelighedselementer, der optræder, henhører under den ovenfor omtalte problembehandlingskompetence. De træk af modelleringskompetencen, som koncentrerer sig om selve modelbehandlingen, er ofte tæt forbundet med problembehandlingskompetence. Men derudover indgår der i modelleringskompetencen mange elementer, som ikke er af klassisk matematisk art, fx viden om udenomsmatematiske kendsgerninger og betragtninger, og beslutninger vedrørende modelleringens formål, hensigtsmæssighed, relevans for stillede spørgsmål osv.

Eksemplificering

På trods af, at den "undersøgende" og den "produktive" side af modelleringskompetence i praksis oftest vil være på banen samtidigt, vil vi for illustrationens skyld splitte eksemplificeringen op på udfordringer, som vi mener overvejende peger i henholdsvis den ene og den anden retning.

Den del af modelleringskompetencen, som består i at *analysere grundlaget for og egenskaberne ved foreliggende modeller og at kunne bedømme deres rækkevidde og holdbarhed*, kan på begyndertrinnet fx illustreres vha. følgende tænkte dialoger:

E_1: "Hvis du hver måned sparer 25 kr. op i banken, har du efter et år 302 kr.

E_2: Det forstår jeg ikke, for $25 \cdot 12$ giver da kun 300 kr. Hvor kommer de 2 kr. fra?"

E_1: "Toget mellem A og B tager 20 minutter, og bussen fra B til C tager 15 minutter. Da man skal vente på bussen i B i 5 minutter, tager hele turen 40 minutter.

E_2: Ja, fra A til C, men så mangler man at lægge den tid til, som skal bruges hen til toget, og fra bussen og derhen hvor man skal."

E_1: "Dygtige sprintere kan løbe 100 meter på 10 sekunder, dvs. de kan løbe 1 km på 1 minut og 40 sekunder.

E_2: Det tror jeg ikke på, for ingen kan holde det hurtige tempo på 10 gange så lang en strækning."

E_1: "Man kan tælle lige så langt, det skal være.

E_2: Ikke i praksis, for det tager jo tid at nævne et tal, og et menneske lever ikke evigt, så der må være en grænse for, hvor langt man kan tælle."

Det er værd at lægge mærke til, at det at kunne undersøge og kontrollere andres matematikinvolverende påstande ikke forudsætter, at man selv ville være i stand til at formulere disse påstande. Ved konstruktionen af dialogerne ovenfor har det således været tanken, at E_1 kunne være en elev på begyndertrinnet, mens det realistiske er at forestille sig, at E_2 er en ældre elev eller i visse af tilfældene en lærer.

De følgende punkter er tænkt som eksempler på mulige afsæt for en lignende kritisk stillingtagen på de øvrige trin.

M At kunne vurdere fordele og ulemper ved placeringen af et fælles fritidscenter, som indbyggerne i fem landsbyer er blevet enige om at bygge.

M Ved at se på en isometrisk tegning af et hus at kunne afgøre, hvilke mål (længder, vinkler) der angiver korrekte mål i målestoksforhold.

A At kunne fremskaffe datamateriale med henblik på at undersøge en påstand om, at antallet af mobiltelefoner vokser dobbelt så hurtigt som antallet af fastnettelefoner.

A Ud fra et regnskab for en skolebod at kunne vurdere, hvilke faktorer der får indflydelse på bodens fremtidige økonomiske situation.

A At kunne forholde sig til, hvordan GPS-navigation virker.

Den "produktive" side af modelleringskompetence – *aktiv modelbygning* – kan fx komme til udtryk med afsæt i følgende problemstillinger:

B "Hvem i klassen er ældst/yngst?"

Problemstillingen kan behandles ved at indhente oplysninger om de enkelte elevers fødselsår og -dag og indtegne resultaterne i en kalender.

B "Hvad er Danmarks højeste bygning?"

Spørgsmålet kan behandles ved at præcisere, hvilke slags bygninger, man vil tage i betragtning, og opsøge data ved forespørgsel, håndbogsopslag osv.

B "Hvor meget sparer man ved at købe et 10-tursklippekort i forhold til at købe 10 enkeltbilletter?"

Besvarelse af dette spørgsmål kan finde sted ved at opsøge priser på diverse klippekort og enkeltbillletter af samme type som klippekortets, dernæst at opstille, gennemføre og kontrollere den relevante udregning, og tage stilling til resultatet, fx ved at sige "Man sparer kun x kroner ved at købe et kort, og da jeg ikke så tit kører i bus, er det dumt at betale så mange penge på én gang", eller "Man sparer x kroner, og da jeg kører meget i bus, synes jeg det er smart at spare de penge."

B "Hvor meget er egentlig en kilometer?"

Besvarelse af dette spørgsmål kræver en beslutning om, hvordan spørgsmålet overhovedet skal forstås. Nogle mulige udlægninger kunne være:

- "Vi må kunne få et konkret fornemmelse af, hvor meget en kilometer er, ved at sammenligne med noget, vi kender, fx afstanden hen til busstoppestedet eller længden af en ting."
- "Da man har den aftale, at en kilometer er navnet på 1000 meter, og vi ved, at der er ca. 100 meter hen til stoppestedet, svarer en kilometer fx til strækningen fem gange frem og tilbage til busstoppestedet."
- "Vores klasseværelse er ca. 8 meter langt, så vi skal have 125 klasseværelser efter hinanden for at få en kilometer."

Med hensyn til *aktiv modelbygning fra mellemtrinnet og frem*, er det som nævnt i karakteristikken et afgørende træk, at man som en del af udfordringen skal forholde sig *strukturerende* til virkeligheden. Denne del af arbejdsprocessen kan få meget forskelligt omfang, alt efter hvor kompleks og diffus udfordringen er i udgangspunktet, og hvor meget den mere eller mindre eksplicit kræver inddragelse af andre ting (hjælpemidler, data, udefrakommende personer etc.), end de i situationen forhåndenværende. Da det er en afgørende ting at forholde sig til, når man skal tilrettelægge arbejdet med sigte på modellleringskompetence, vil vi splitte eksemplificeringen op i oplæg til henholdsvis *kortere- og længerevarende modelleringsaktiviteter*. De korterevarende oplæg er karakteriseret ved, at vi forestiller os, at man meningsfyldt kan tage udfordringen op i klasseværelset inden for rammerne af en lektion eller to. Derimod vil eksemplerne på oplæg til længerevarende modelleringsprocesser givet kræve, at man sprænger disse rammer.

Først eksemplerne på *korterevarende modelleringsforløb:*

M “Med 42 kvadratiske fliser på $0,5$ m $\cdot$ $0,5$ m skal lægges en terrasse i et hjørne af en have. Omkring terrassen skal plantes buske med $0,5$ meters mellemrum. Buskene sælges enkeltvis for 23 kr. og i bundter med 10 i hver for 200 kr. Hvor dyr bliver terrassen? Kunne det være gjort billigere?”

M “En $3,8$ meter lang ledning skal trækkes fra en kontakt til en lampe. Ledningen skal fastgøres til væggen med $0,5$ cm brede ledningsholdere, som skal placeres med en afstand på $20 - 25$ cm. Der sættes en ledningsholder i starten og en til slut. Hvilket er det mindste antal ledningsholdere, der skal bruges? Hvor stor bliver afstanden mellem ledningsholderne?”

M “Hvor meget papir skal man bruge for at binde rapporten her ind?”

M “Hvor mange meter tæppe skal der købes for at lægge væg-til-væg tæppe i rummet her?”

M “Hvor mange mennesker kan der stå i rummet her?”

M “Hvor lang tid skal du sætte af til at komme i skole om morgenen?”

A “Hvor langt kan man tælle, i praksis? – Hvis vi antager, at man kan tælle ét tal i sekundet, kan man tælle 86 400 tal i døgnet, hvis man ikke foretog sig andet. Det bliver 31 536 000 om året, og hvis man lever i 100 år, bliver det i alt til 3 153 600 000, altså lidt mere end 3 milliarder.”

A “Rapporten her er lidt af en moppedreng, ikk´? Den er trykt med bogstaver af punktstørrelse 11, så for at gøre sidetallet mindre kunne man vælge at trykke den med punktstørrelse 10. Hvor mange sider er det rimeligt at gætte på, rapporten så vil blive på?

Man kan også mindske sidetallet ved at tillade skriftbredden på hver side at være 16 cm i stedet for de nuværende 13 cm. Hvilken reduktion i sidetallet vil det anslået give?

Hvilken relativ reduktion af sidetallet vil man kunne nå op på, hvis man kombinerer de to måder at reducere på?”

A “Giv, vha. tabellen her (tabellen på side 221) et skøn over, hvor stor en del af den danske befolkning, der aldrig kommer på folkebibliotekerne.”

A “Tegn en skitse af et hus på 120 m^2.”

A “Hvilken form skal en tagrende have?”

A “Hvor mange tandbørstninger er der til i en tube tandpasta?”

A “Hvor langt fremme ad vejen skal der være fri bane, for at man sikkert kan overhale?”

Som eksempler på oplæg til *længerevarende modelleringsforløb* vil vi nævne følgende:

M “Du vil gerne ringe til dine bedsteforældre, som er på ferie i Thailand. Hvornår er det godt at ringe til dem?”

Spørgsmålet kan besvares ved at finde oplysninger om tidsforskellen mellem Danmark og Thailand, benytte dette til at finde ud af, hvornår begge parter er vågne og til om muligt at vælge et velegnet tidspunkt i dette tidsinterval.

M “Hvor langt er der rundt om skolen?”

M “Bestem højden af skolens flagstang.”

A “Kan man motionere sig slank?”

A “Hvor mange vindmøller skal der bygges i Danmark?”

A “Hvilket internet-abonnement skal man vælge?”

A “Hvad er sammenhængen mellem ens indkomst og den skat, man betaler?”

A “Planlæg indretningen af skolens nye computerrum.”

B.2.4 Ræsonnementskompetence

Karakteristik

Gennem hele grundskolen består denne kompetence dels i at kunne *følge* og *forholde sig til* et elementært *matematisk ræsonnement*, dvs. en kæde af argumenter fremsat af andre på skrift eller i tale til støtte for en påstand, dels i selv at kunne *udtænke og gennemføre sådanne ræsonnementer*. I begge henseender indgår det at kunne forstå den logiske betydning af et *modeksempel*.

På afsluttende trin bør man forvente at dækningsgraden udvides på to områder: For det første bør eleverne ikke alene kunne forholde sig til, men også kunne *bedømme et matematisk ræsonnement*. For det andet bør eleverne gøre sig *eksemplariske erfaringer* med, hvad et matematisk *bevis* er, hvordan det adskiller sig fra andre former for matematiske ræsonnementer, fx heuristiske ræsonnementer hvilende på intuition eller på betragtning af specialtilfælde, samt med selv at omforme heuristiske ræsonnementer til egentlige (gyldige) beviser.

Kommentar

Ræsonnementskompetencen kommer både i spil, når det gælder om at overbevise sig om reglers og påstandes rigtighed, og om at godtgøre at svar på spørgsmål, opgaver eller problemer er korrekte og fyldestgørende. Det gælder, hvad enten der er tale om rent matematiske forhold eller om spørgsmål i tilknytning til anvendelser.

Ved at knytte sig til retfærdiggørelsen af svar og løsninger, er ræsonnementskompetencen intimt forbundet med både modelleringskompetencen og problembehandlingskompetencen. Den udgør så at sige disses "juridiske" side.

I princippet kunne også evnen til at gennemføre rene rutineprocedurer, fx udregninger, siges ind under ræsonnementskompetence, men med mindre disse enten forudsætter opfindsomhed eller er komplekse og overblikskrævende, vil vi henregne dem under den nedenfor omtalte symbol- og formalismekompetence.

På begyndertrinnet, og som overgangsperiode til en gradvist mere formel tilgang også på mellemtrinnet, vil alle ræsonnementer være enten intuitive og uformelle eller konkrete (fx baseret på specifikke optællinger, udregninger eller tegninger). Der er derfor ikke tale om bevisførelse i nogen streng betydning af dette begreb.

I forbindelse med de eksemplariske erfaringer med matematisk bevisførelse på afsluttende trin er det vigtigt at minde om, at matematiske beviser ikke pr. nødvendighed hænger sammen med eksplicit formulerede sætninger og aksiomatiske systemer.

Eksemplificering

Størstedelen af eksemplerne på *lukkede problemer* vil kunne genbruges her, hvis man sætter fokus på måden, udfordringen tages op på. Her vil vi af pladshensyn nøjes med nogle udfoldninger af sådanne tænkte reaktioner.

Til illustration af, hvad det *på begyndertrinnet* kan indebære at kunne *følge og forholde sig til* et elementært matematisk ræsonnement, kan nævnes:

E_1: "Kasper og Marie bor henholdsvis $1,5$ og 2 kilometer fra skolen, så må de bo $1,5 \text{ km} + 2 \text{ km} = 3,5 \text{ km}$ fra hinanden.

E_2: Nej, det behøver de ikke. Det kunne jo være, at de boede på den samme lige vej til skolen, og så ville der kun være $1/2$ kilometer mellem dem."

E_1: "I de her bakker med flødeboller til 10 kr. er der 6 i hver. Vi har 60 kr., og vi er 9, der skal dele, så hvis vi skal have lige mange, bliver vi nødt til mindst at købe 3 bakker. Én er for lidt, med 2 bakker bliver der 3 boller tilovers, men med 3 bakker går det op, og så bliver der 2 flødeboller til hver.

E_2: Ja, det har du ret i. Men vi har jo råd til at købe 6 bakker, så ville vi få 4 flødeboller hver."

Her er endnu et par eksempler på, at det at kunne udøve en kompetences produktive side på et givet felt ikke er en forudsætning – ligesom det heller ikke er en tilstrækkelig betingelse – for at kunne udøve den tilsvarende undersøgende side af kompetencen (selv om de to ting selvfølgelig langt fra er uafhængige). E_2 ovenfor er således tænkt som en elev på begyndertrinnet, mens E_1 specielt i andet eksempel foretager beregninger som de færreste elever på begyndertrinnet ville være i stand til at gennemføre.

På mellemtrinnet kan det handle om at følge og forholde sig til ræsonnementer som

E_1: "Jeg tror at alle tal går op i 60, for både $1, 2, 3, 4, 5$ og 6 gør.

E_2: Nej da, 7 går jo ikke op i 60."

E_1: "Hvis arealet af et rektangel fordobles, så fordobles omkredsen også.

E_2: Nej, fordi et rektangel med arealet $3 \cdot 2 = 6$ har omkredsen 10, og hvis arealet sættes lig 12, kan omkredsen fx være lig $2 \cdot (3+4) = 14$, og det er jo ikke det dobbelte af 10."

E_1: "Passer det, at når man ganger et naturligt tal med et andet tal, bliver resultatet altid større end det oprindelige tal?

E_2: Nej, ikke hvis der fx ganges med $\frac{1}{2}$. Det gælder altså for nogle tal, men ikke altid."

E_1: "Hvis man laver en figur af kvadrater med sidelængden 1 bliver omkredsen altid et lige tal.

L: Ja, hvis du forudsætter, at kvadraterne ikke ligger forskudt op ad hinanden. Hvilke tal kan man få, hvis man tillader det?

E_1: Tja, i hvert fald et ulige tal, hvis man ét sted lader to kvadrater ligge "halvt" op ad hinanden."

Her er et eksempel *på afsluttende trin*, hvor det at følge og forholde sig til ræsonnementer og selv at *udtænke og gennemføre* dem sammenvæves:

E_1: "Der er flere ulige tal end lige tal. For når vi tæller, starter vi jo med 1, som er ulige, så de ulige tal har altid et forspring på 1.

E_2: Nej, for vi kan blive ved med at finde nye lige og ulige tal, så der må være lige mange.

E_1: Det kan man da ikke bare sige, det kunne jo være, man kunne finde flere nye ulige end nye lige tal.

E_2: Nå ja, måske, men så kan vi jo også sige sådan her: Der er 5 ulige og 5 lige tal blandt $1,2,\dots,10$. Så må der da også være lige mange lige og ulige blandt $11,12,\dots,20$, for vi har jo bare lagt 10 til, og sådan kan vi blive ved.

E_1: Det køber jeg ikke, for hvad nu hvis vi startede med $1,2,\dots,11$, hvor der er 6 ulige og 5 lige, og så hele tiden lagde 11 til, dvs. 6 ulige og 5 lige, så kan du nok se at der er flere ulige end lige tal.

E_2: Nix, for når du lægger 11 til, ændrer du et lige tal til et ulige og omvendt, så blandt $12,13,\dots,22$ er der 6 lige og 5 ulige. Og sådan bliver det ved at skifte. Så det, jeg siger, passer, fordi 10 ikke laver om på lige og ulige, når det lægges til."

Lignende dialoger kan skitseres i forhold til ræsonnementer som

M Et såkaldt "klippebevis" for at vinkelsummen i en trekant er 180° ved at klippe vinkelspidserne af en trekant og lægge dem side mod side med spidserne mod samme punkt, hvorved der fremkommer en lige vinkel.

M At formulere en regel for beregning af omkredsen af en cirkel ved at måle hhv. omkreds og diameter på mange runde former og finde en tilnærmet værdi for π.

M At enhver trekant kan indtegnes i et rektangel således, at en side følger en af rektanglets sider, og den modstående vinkelspids i trekanten rører den modstående side i rektanglet. Trekantens areal vil udgøre halvdelen af rektanglets areal, hvilket forklarer formlen for arealet af en trekant.

M At man kan finde arealet af et parallelogram ved at klippe en trekant af i den ene ende og tilføje den til den anden ende, for så får man et rektangel, og der er arealet jo bare de to sidelængder ganget sammen.

A At kunne afgøre hvad det mindste antal flytninger er, når man spiller "Tårnene i Hanoi", ved at tage udgangspunkt i en optælling i simplere tilfælde, hvor der spilles med færre end de oprindelige syv ringe.

I forbindelse med forventningen om eksemplariske erfaringer med matematisk bevisførelse på afsluttende trin, kan påpegningen af, at matematiske beviser ikke pr. nødvendighed hænger sammen med eksplicit formulerede sætninger og aksiomatiske systemer, illustreres med følgende bevis:

A "Når jeg ved, at vinkelsummen i en trekant er $180°$, så kan jeg vise, at vinkelsummen i et rektangel er $360°$ ved at tegne en diagonal i rektanglet, hvorved der fremkommer to trekanter, der tilsammen har vinkelsummen $2 \cdot 180°$."

B.2.5 Repræsentationskompetence

Karakteristik

Gennem hele grundskolen består denne kompetence dels i at kunne *forstå* (dvs. afkode, fortolke og skelne mellem) og *betjene sig af* forskellige slags repræsentationer af matematiske objekter, fænomener, problemer eller situationer (herunder symbolske, specielt algebraiske, visuelle, geometriske, grafiske, diagrammatiske, tabelmæssige eller verbale repræsentationer, men også konkrete repræsentationer ved materielle objekter), dels i at kunne forstå de indbyrdes *forbindelser* mellem forskellige repræsentationsformer for det samme sagsforhold, dels i at kunne *vælge* blandt og *oversætte* imellem forskellige repræsentationsformer for et givet sagsforhold, alt efter situation og formål.

Fra mellemtrinnet og frem udvides den forventede dækningsgrad gradvist til også at omfatte det at have *kendskab til styrker og svagheder* ved forskellige repræsentationsformer for det samme sagsforhold, herunder informationstab og -tilvækst.

Kommentar

Af særlig betydning i matematik er symbolske repræsentationer. På begyndertrinnet er der frem for alt tale om talsymboler og symboler for regneoperationerne, lighedstegn osv. Derfor er der på dette trin en nær forbindelse mellem denne kompetence og den efterfølgende symbol- og formalismekompetence, som bl.a. fokuserer på spillereglerne for omgangen med standardsymboler.

Eftersom det at repræsentere matematiske sagsforhold er nært forbundet med at kommunikere i, med og om matematik, er der også stærke bånd til den senere omtalte kommunikationskompetence.

Det indgår også i denne kompetence at have blik for forskellen mellem standardrepræsentationer, såsom talsymboler, og repræsentationer som opfindes på stedet til at lette tænkning eller kommunikation.

Eksemplificering

Til illustration af denne kompetence er der særlig grund til at pege på mange forskellige repræsentationsformer for naturlige tal:

Ikonisk vha. prikker eller klodser af ens form og størrelse, cuisenairestænger, centicubes, kuglerammer osv.

Symbolsk vha. "vores" hindu-arabiske notation, romertal, kileskrift osv.

Verbalt vha. udtryk som "otte", "trehundredeogsyv" osv.

Af særlig betydning på begyndertrinnet er ækvivalensen mellem forskellige sådanne talrepræsentationer, når det gælder entydighed, og forskellene mellem dem når det gælder håndterbarhed. Fremstillingen af tallet 0 i de forskellige repræsentationer giver anledning til særlige betragtninger.

Også forskellige repræsentationer af regneoperationerne $+$, $-$, $\cdot$ og : (her skrevet med deres danske tegn!) og regneopstillinger hører hjemme i denne forbindelse. Det samme gælder det 20-talsystem som ligger til grund for de danske talnavne (halvfjerds står for "halvfjerde" (dvs. $4 - 1/2 = 3{,}5$) "sinde" (dvs. gange) tyve).

I den geometriske verden kan man tænke på forskellige repræsentationer af et linjestykke, fx

- en tynd træstav.
- en snor stramt udspændt mellem to pløkke.
- en rystet frihåndstegning på papir.
- en sirlig tegning med lineal og arkitektblyant på papir.
- en kridtstreg på en tavle.
- en punktmængde på en computerskærm.

Man kan også tænke på en plan firkant, eksempelvis repræsenteret ved

- en tegning.
- en fysisk firkant samlet af fire stænger med led.
- en stiliseret ikon, hvis man blot har brug for at referere til begrebet firkant til forskel fra fx tre- eller femkant.

På tilsvarende vis kan det handle om forskellen mellem en tegnet cirkel i en bog og én, som fremstår ved tegning på tavlen med en snor og et stykke kridt.

På mellemtrinnet kan det at *forstå og betjene sig af forskellige repræsentationsformer* eksemplificeres således:

E_1: "Jeg forstår ikke, at 25% er det samme som andelen $0,25$ og brøkdelen $^1/_4$."

E_2: "Jo, tænk på penge. 25% er det samme som 25 øre ud af hver 100 øre. Det skriver man som $0,25$ kr., og det passer også med, at der skal fire 25-ører til en krone, altså $^1/_4$ krone."

M Opgaven om antal bedstemødre, som indgik i eksemplificeringen af problembehandlingskompetence, løses ved at afkode procentsatserne repræsenteret i et 10×10 rudenet.

M På baggrund af oplysninger om kiloprisen for en vare at tegne en graf i et koordinatsystem, hvor prisen på et vilkårligt antal kilo kan aflæses.

Hvad angår det at *kunne vælge blandt og oversætte imellem forskellige repræsentationsformer*, vil vi nævne følgende:

B "Gammeldags" viserure, med hindu-arabiske tal eller romertal, eller helt uden tal, og digitalure leverer ækvivalente repræsentationer af klokkeslettet. Det samme er tilfældet med 12-timers eller 24-timers navngivning af klokkeslettet, altså 9.30 pm som det samme som 21.30.

M Beskrive resultaterne fra en undersøgelse af, hvordan børn anvender deres fritid, i forskellige diagrammer eller i tabelform.

M Finde hvor mange forskellige flag, der kan fremstilles med fire farver, når der på flaget skal være én stor stjerne i en farve forskellig fra baggrunden, og beskrive løsningen i form af et tælletræ, ved at tegne flagene eller som $4 \cdot 3 = 12$.

A Vælge mellem regneforskrift, tabel, graf og hverdagssproglig repræsentation for en funktionel sammenhæng alt afhængig af situation og modtager.

B.2.6 Symbol- og formalismekompetence

Karakteristik

Gennem hele grundskolen består denne kompetence dels i at kunne *afkode* symbol- og formelsprog, i at kunne *oversætte* frem og tilbage mellem symbolholdigt matematisk sprog og naturligt sprog, og i at kunne *behandle og betjene sig af* symbolholdige udsagn og udtryk.

Fra mellemtrinnet og frem udvides den forventede dækningsgrad ved, at de symbolholdige udsagn, eleverne skal kunne behandle og betjene sig af, fordres at inkludere *formler*.

På afsluttende trin udvides dækningsgraden yderligere ved også at inkludere det at *have kendskab til* karakteren af, og "spillereglerne" for, formelle matematiske systemer.

Kommentar

Denne kompetence adskiller sig på begyndertrinnet fra den ovennævnte repræsentationskompetence, som den ellers er nært forbundet med, ved at fokusere på symbolernes karakter, status og betydning, og på reglerne for omgang med dem. I sammenhæng med den elementære matematik angår symbol- og formalismekompetencen frem for alt omgangen med standardsymboler og navne i tilknytning til størrelser, tal og regning, og tilknytning til grundlæggende begreber fra plan og rum.

Eksemplificering

Eksempler til illustration af denne kompetence byder sig næsten automatisk til. Med hensyn til det at *afkode symbol- og formelsprog* kan det dreje sig om at forstå

B at 406 står for fire hundreder, ingen tiere og 6 enere.

B at $4 < 7$ er et udsagn som skal læses "4 er mindre end 7".

B at $=$ kaldes et lighedstegn.

B at $1\text{m} = 100$ cm.

B at man ikke skriver 0406 i sammenhæng med regning, men nok i fx et personnummer eller i en dato.

M at når vi skriver tal som $3\frac{1}{4}$ og $5\frac{7}{11}$, mener vi $3+\frac{1}{4}$ og $5+\frac{7}{11}$. Men når vi skriver $3a$ og $5b$, mener vi $3\cdot a$ og $5\cdot b$. Det betyder, at hvis vi sætter $a=\frac{1}{4}$ og $b=\frac{7}{11}$ får vi $3\cdot\frac{1}{4}$ og $5\cdot\frac{7}{11}$ i stedet for $3\frac{1}{4}$ og $5\frac{7}{11}$.

M at man ikke har lov til at skrive $6+(5)$, $6:0$ eller $6--3$.

M at ved forskellig placering af parenteser giver regnestykket $15-5+3$ forskellige resultater.

M at $5\cdot(3+4)$ ikke er det samme som $5\cdot 3+4$, at $12+27=27+12$ og $12\cdot 27 = 27\cdot 12$, at $3+(4+5)=(3+4)+5$.

A . . . og at det ikke afhænger af de konkrete tal.

A "$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, siger du, men hvorfor er der kun to led, der skulle da blive fire?"

"Ja, men leddene *ab* og *ba* er lige store, fordi rækkefølgen er ligegyldig, når man ganger tal med hinanden. I udregningen af parenteserne bliver de derfor 0 tilsammen, fordi de har hver sit fortegn, og vi kan derfor reducere udregningen ved at lade være med at skrive disse to led."

Som eksempler på det at *oversætte frem og tilbage mellem symbolholdigt matematisk sprog og naturligt sprog* kan nævnes:

B "Skriv et regnestykke som viser, at hvis du har 3 blyanter, og din sidemand har 2 blyanter, så har I fem blyanter tilsammen."

M "Opskriv en ligning som udtrykker, at Per er 5 år ældre end Niels."

M "Hvis A drikker $\frac{1}{4}$ og B drikker $\frac{2}{5}$ af en $1\frac{1}{2}$ liter cola, hvor stor en procentdel af colaen har de så fået hver? Skriv hvor meget du synes, de skulle have hver."

A "Hvis D står for antal drenge i en klasse, og P for antal piger, hvad betyder det så at $P = D$? $D = \frac{P}{2}$? $P = D - 2$?"

A "Arne, Bent og Curt har en tipsklub, hvor de deler gevinster efter deres indsats. Af en gevinst får Arne halvdelen, Bent en fjerdedel, og Curt en sjettedel – mens de bestemmer at give resten på 2500 kr. til Røde Kors. Hvor stor er gevinsten?"

A "To biler A og B holder ved den samme vej. De sætter begge igang samtidig og kører i samme retning, A med 80 km/time, B med 60 km/time. Hvor længe er A bag B, hvis A fra starten holdt 5 km længere nede ad vejen?"

A "En rektangulær indhegning skal laves, så den består af to dele adskilt af et hegn. Hvor stort et stykke jord kan man indhegne med et givet antal meter hegn til rådighed?"

A "Fem venner vil starte en cykelklub. For at øge medlemstallet vedtages det, at alle medlemmer hvert kvartal skal hverve tre nye medlemmer, indtil man er nået op på 1000 i alt, hvorefter der oprettes venteliste. Karakterisér udviklingen i medlemstallet."

Hvad angår det at *behandle og betjene sig af symbolholdige udsagn og udtryk* vil vi nævne følgende eksempler:

M At kunne udtrykke et forhold mellem A og C, hvis man om tre personers alder ved, at $A < B < C$.

M At kunne anvende formlerne for omkreds og areal af en cirkel.

A "Antag, at 14-årige Marie er med i en gruppe på 10 børn med gennemsnitsalderen 13 år. Hvis Marie forlod gruppen og erstattedes af et andet barn, hvor meget kunne gennemsnitsalderen da blive ændret?"

Med symbol- og formalismekompetence på dette trin kunne svaret gives ved at konstatere, at summen af børnenes aldre er 130 år. Hvis Marie forlader gruppen og erstattes af et barn på x år, er summen af aldrene $(116+x)$ år. Dermed er gennemsnitsalderen $11,6+x/10$. Eftersom et barn har alderen $0 \leq x \leq 18$, kan gennemsnitsalderen ende hvor som helst i intervallet fra 11,6 til 13,4 år, men ikke udenfor.

A Når man køber en vare til prisen K med rabat $r\%$, er det underordnet, om man betaler moms ($m\%$) først og derefter får rabat, eller om man får rabat først og derefter betaler moms. Det skyldes, at $\left[K\left(1+\frac{m}{100}\right)\right]\left(1-\frac{r}{100}\right) = \left[K\left(1-\frac{r}{100}\right)\right]\left(1+\frac{m}{100}\right)$, som både benytter sig af den associative og den kommutative lov for multiplikation.

A Hvis momsen på en vare udgør $m\%$, udgør momsen $\frac{m}{100+m} \cdot 100\%$ af varens salgspris. Er nemlig prisen før moms K, koster varen med moms $K\left(1+\frac{m}{100}\right)$. Heraf udgør momsen $K \cdot \frac{m}{100}$, dvs. brøkdelen

$$\frac{K \cdot \frac{m}{100}}{K\left(1+\frac{m}{100}\right)} = \frac{m}{100+m}$$

Med andre ord udgør momsen $\frac{m}{100+m} \cdot 100\%$ af udsalgsprisen. Med den aktuelle momsprocent (25%) i Danmark, fås det velkendte resultat, at momsen udgør $\frac{25}{125} \cdot 100 = 20\%$ af udsalgsprisen.

I forhold til det at *have kendskab til karakteren af og "spillereglerne" for formelle matematiske systemer* kan vi nævne:

A En undersøgelse af hvilke konsekvenser det får for en række velkendte forhold, hvis man går ind og "piller" ved nogle af de definerende træk ved et formelt system. Med udgangspunkt i plangeometri kan det handle om "Taxageometri", hvor den grundlæggende regel er, at man kun må bevæge sig rundt i planen, svarende til linjerne ("vejene") på ternet papir. Hvilke konsekvenser får det fx for

- begrebet "længde"?
- begrebet "cirkel"?
- antallet af kortest mulige veje mellem to punkter?

B.2.7 Kommunikationskompetence

Karakteristik

Gennem hele grundskolen består denne kompetence dels i at kunne *sætte sig ind i og fortolke* andres matematikholdige skriftlige, mundtlige eller visuelle udsagn og "tekster", dels i at kunne *udtrykke sig* om matematikholdige anliggender, skriftligt, mundtligt eller visuelt over for forskellige kategorier af modtagere.

Fra mellemtrinnet og frem fordres herudover, at elevernes evne til at kunne udtrykke sig om matematikholdige anliggender indbefatter det at kunne gøre det på forskellige måder og på forskellige niveauer af teoretisk eller teknisk præcision.

Kommentar

Eftersom al skriftlig, mundtlig eller visuel kommunikation i og med matematik må betjene sig af diverse repræsentationsformer, er der et nært slægtskab med den ovenfor omtalte repræsentationskompetence. Oftest vil en sådan kommunikation også betjene sig af matematiske symboler og termer, hvilket understreger forbindelsen til symbol- og formalismekompetencen. Kommunikation om matematik, derimod, behøver ikke nødvendigvis at betjene sig af specifikke matematiske repræsentationsformer.

Eksemplificering

Næsten alle de eksempler, som tidligere er givet til illustration af de øvrige kompetencer, kan også tjene til at eksemplificere kommunikationskompetence i og med matematik. Andre (tænkte) eksempler kunne være:

B En elev, der viser en kammerat, hvordan hun har fundet ud af, at man ikke kan dele en plade chokolade med $3 \cdot 5$ stykker blandt 4 børn, så alle får lige meget: "Her har jeg tegnet pladen med $3 \cdot 5$ ens stykker. Når der er fem rækker, må hver skulle have mere end ét stykke. Derfor prøver jeg med to stykker til hver. Først skraverer jeg 4 stykker og så 4 til, men så er der jo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 tilbage. Det er mere end 4, så alle kan få et stykke til. Så derfor skraverer jeg 4 til, men så er der 3 tilbage, og det er for lidt, til at alle kan få et stykke til. Så derfor siger jeg, at vi ikke alle fire kan få lige mange stykker, uden at der bliver noget tilovers."

M En elev, der vil vise læreren, hvordan han fandt frem til, at $1+2+3+\ldots+10=55$: "Først lagde jeg de tre første tal sammen. Det giver 6. Så de tre næste, det giver 15. Nu har jeg i alt 21. De sidste tager jeg to og to, $7+8=15$, $9+10=19$. Det vil sige i alt $21+15+19$. Det regnede jeg ud til 55. Men så sagde Marie, at hun havde gjort det på en anden måde. Hun fik også 55. Hun tog først 1 og 10. Det giver 11, så 2 og 9, det giver også 11. Så tog hun 3 og 8, 4 og 7, de giver også 11, to gange. Til sidst var der kun 5 og 6 tilbage, og de giver også 11. På den måde fik hun 5 11-taller. Det er jo 5 tiere, altså 50 og fem enere. Så det blive 55 til sammen. Jeg ved ikke, hvilken måde der er bedst. Jeg regnede det jo bare ud, man skulle ikke tænke så meget, men Marie blev jo nødt til at tænke først, og det er vel mere besværligt, ikke? Hvem siger, at der altid er en smart måde at gøre det på?"

Også evnen til at fremsætte betragtninger over matematikkens natur er udtryk for kommunikationskompetence, fx:

M "Hvordan kan det være, at man mange gange kan få det rigtige resultat på helt forskellige måder?"

A "Det er mærkeligt med matematik. Tit tror man, at man har regnet rigtigt, men så har de andre fået et andet resultat. Så leder vi efter fejlen for at se, hvem der har ret, og når vi har fundet den, er vi pludselig enige om, hvordan det skal være. Andre gange har vi alle sammen ret, men resultaterne blev forskellige, fordi vi selv skulle vælge nogle ting i opgaven."

I forhold til det at *udtrykke sig over for forskellige kategorier af modtagere*, kan det at afpasse sin reaktion på en given udfordring efter, hvem modtageren er, tjene som eksempel. Med det følgende som udgangspunkt, udfordres både kommunikationskompetencens "undersøgende" og "produktive" side, jf. afsnit 4.4.2 (side 63).

> "[...] Jeg står her med en udskrift fra en kilde[1], [...] som ministeren selv har udgivet. [...] Og med hensyn til, hvem der kommer på bibliotekerne, og hvem der ikke kommer, er der en tabel 18 med en gruppe delt ind efter alder, og dér står, at 39 pct. af den mandlige del af befolkningen aldrig kommer på bibliotekerne, og at 30 pct. af den kvindelige del af befolkningen, altså fordelt gennemsnitligt over alder, aldrig kommer der. Og når jeg lægger mænd og kvinder sammen – det skal man være lidt forsigtig med, men på det her område tør jeg godt – så giver 39 pct. af mændene og 30 pct. af kvinderne befolkningen tilsammen, og det må være 69 pct. Tager jeg fejl?" (www.folketinget.dk; 16. november 1999, lovforslag 78, 1. behandling, tale 20.)

[1]Kulturministeriet (1999): *Kulturpengene 1999*, Kulturministeriet.

Tabel 18: *Andelen af af mænd og kvinder i forskellige aldersgrupper, der kom på folkebibliotekerne 1998.*

Pct.	Mindst en gang om måneden M	Mindst en gang om måneden K	Mindst en gang om året M	Mindst en gang om året K	Aldrig M	Aldrig K
16-19 år	40	64	40	20	9	12
20-29 år	35	45	26	24	30	30
30-39 år	24	46	23	33	43	16
40-49 år	30	40	25	28	35	27
50-59 år	18	41	23	28	51	26
60-66 år	27	22	25	19	38	44
67-74 år	35	30	35	23	30	42
75 år-	17	27	4	7	79	59
Alle	27	40	25	25	39	30

Kilde: SFI, Kultur og fritidsaktivitetsundersøgelsen 1998.

M "Gå sammen to og to, og diskutér argumentet ovenfor. Lad for eksempel den ene af jer være 'forsvarer' og den anden 'anklager'."

A "Skriv et læserbrev hvor I svarer på spørgsmålet i citatet ovenfor, som stammer fra en debat i folketinget om folkebibliotekerne."

B.2.8 Hjælpemiddelkompetence

Karakteristik

Gennem hele grundskolen består denne kompetence dels i at *have kendskab til* eksistensen og egenskaberne ved diverse former for relevante redskaber til brug for matematisk virksomhed, og have indblik i deres *muligheder* i forskellige slags situationer, dels i at være i stand til på reflekteret vis at *betjene sig af* sådanne hjælpemidler.

Fra mellemtrinnet og frem udvides karakteristikken til udover at fordre kendskab til diverse relevante redskabers muligheder også at indbefatte kendskab til disse redskabers *begrænsninger*.

Kommentar

Da det er centralt for alle hjælpemidler for matematisk virksomhed, at de involverer en eller flere typer af matematisk repræsentation, oftest i en særligt udviklet form, er hjælpemiddelkompetencen i slægt med repræsentationskompetencen. Da brugen af hjælpemidler også ofte er underlagt ret bestemte regler, og hviler på bestemte matematiske forudsætninger, er hjælpemiddelkompetencen tillige forbundet med symbol- og formalismekompetencen.

På begyndertrinnet udgøres hjælpemidlerne ikke mindst af konkrete materialer (inkl. skriveredskaber), men også omgangen med simple udgaver af it tilpasset alders- og undervisningstrinnet indgår selvfølgelig her.

Eksemplificering

Det ligger nærmest i sagens natur, at der her kan være tale om kompetence til tænksomt at omgås et bredt spektrum af konkrete materialer til støtte for begrebsdannelse, undersøgelse af sammenhænge og mønstre, efterprøvelse af hypoteser, indøvelse af rutiner osv. Geoboards, centicubes, diverse klods-, brik-, eller stangsystemer, kuglerammer, geometriske skabeloner, spirografer, linealer, passere, vinkelmålere, terninger, særligt indstreget papir, karton til foldning eller udskæring m.v. hører alle hjemme i denne sammenhæng.

Vi kan fx forestille os

- elever, der repræsenterer hele tal og løser additionsopgaver ved hjælp af centicubes.
- elever, som med en passer tegner to cirkler med samme radius, den ene med centrum i den andens periferi, forbinder cirklernes centre og skæringspunkterne med centrene og måler de fremkomne linjestykker med en lineal, med henblik på at finde mønstre og foreslå regler.
- elever, der vha. it-software af typen LOGO kan diktere instruktioner til hinanden og på den måde skabe figurer og mønstre, som kan diskuteres og undersøges.
- en lærer, der bruger demonstrationssoftware (fx Geometricks, Geometer's Sketchpad og andet) for at vise dynamisk geometrisk visualisering, fx af hvordan en hængslet firkant med faste sider kan omformes ved at "trække" eller "skubbe" i siderne.
- elever, der undersøger sammenhænge mellem de indgående størrelser i forskellige areal- og rumfangsformler ved at "trække" eller "skubbe" i hjørnerne på figuren vha. et geometriprogram.
- elever, der bruger lommeregnere eller regneark til at undersøge hypoteser om tal: "Hvad kan man sige om et tal, der fremgår af et andet ved multiplikation med fx 5?".
- elever, der – som led i at udvikle kendskab til hjælpemidlers muligheder og begrænsninger – vurderer resultatet af en regneoperation udført på lommeregner, og begynder at reflektere over fordele og ulemper ved at anvende forskellige programtyper.

B.3 Overblik og dømmekraft vedrørende matematik som fagområde i grundskolen

Ordene "overblik" og "dømmekraft" skal selvsagt forstås relativt til grundskoleelevers livsverden. For alle tre formers vedkommende tænkes der desuden først og fremmest på kendskab og erfaringer erhvervet i intim forbindelse med opbygningen af de ovenfor behandlede kompetencer. Jo tidligere i grundskoleforløbet, man befinder sig, jo mere intim vil forbindelsen være, og jo mindre mening vil det i praksis give at udskille udvikling af de forskellige former for overblik og dømmekraft som selvstændige læringsmål.

Ikke desto mindre er det som tidligere nævnt en central bestræbelse for dette projekt at bidrage til at mindske problemer med utilstrækkelig sammenhæng mellem de forskellige niveauer og trin i matematikundervisningen. I den forbindelse er det – ikke mindst i forhold til uddannelser, som skal indgå i symbiose med andre uddannelser – afgørende at undgå, at undervisningens "toning" skifter så markant fra et niveau til et andet, at man ikke kan genkende det som malet med den samme "palet". En sådan situation fremprovokeres let, hvis der undervejs i en udvikling pludselig bringes helt nye "grundfarver" i spil. Så er det bedre fra starten at have alle "grundfarverne" med på "paletten", og blot være bevidst om, at nogle af farverne til en start mest er med netop for fuldkommenhedens skyld og derfor skal bruges med varsomhed.

Når vi vælger at fastholde de forskellige former for overblik og dømmekraft i karakteristikken af grundskolens matematikundervisning, er det således primært for at fastholde læreren og andre medtilrettelæggeres opmærksomhed på, at det på alle niveauer og trin gør en forskel, om de perspektiver på matematik, som der her er tale om, gøres til genstand for udtrykkelig behandling, refleksion og artikulation, *når lejligheden byder sig*. Sådanne metafaglige diskussioner er velegnede som træning i at kunne "hæve sig op over" de mange konkrete erfaringer, man gør sig undervejs i undervisningen, og en sådan generel evne til at kunne operere på flere vidensniveauer er en forudsætning for ad åre at udvikle bevidst og artikuleret overblik og dømmekraft som dem vi her beskæftiger os med, jf. kommentarerne i afsnit 4.5 (side 66).

Netop fordi der udelukkende er tale om toninger på arbejdet med udviklingen af de otte kompetencer, mener vi, det vil være misvisende at forsøge at eksemplificere arbejdet med de tre former for overblik og dømmekraft vha. aktiviteter, som kunne tænkes at eksistere i deres egen ret. Den tætte forbindelse med kompetenceudviklingen mener vi bedre kommer frem ved at se på alle eksemplerne nævnt under hver kompetence i lyset af de generelle spørgsmål, som bruges til at eksemplificere tanken med hver af de tre former for overblik og dømmekraft i afsnit 4.5.

Således kan utallige eksempler genereres ved for hver gruppe af kompetenceeksempler at stille sig selv spørgsmålet: "Er nogle af disse eksempler – eller omformuleringer heraf – velegnede som erfaringsgrundlag for at kunne diskutere nogle af spørgsmålene i afsnit 4.5 eller forlængelser heraf, og er her og nu et passende tidspunkt for en sådan diskussion?”

B.3.1 Matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder

Karakteristik

Gennem hele grundskolen er genstanden for denne form for overblik og dømmekraft den faktiske anvendelse af matematik til udenomsmatematiske formål inden for områder af *dagligdags* betydning. Denne anvendelse kommer i stand og til udtryk gennem bygningen og udnyttelsen af matematiske modeller.

Fra mellemtrinnet og frem bør den faktiske anvendelse af matematik til udenomsmatematiske formål inden for områder af *samfundsmæssig eller videnskabelig* betydning med gradvist større vægt supplere de dagligdags anvendelser som genstandsfelt.

Kommentar

På begyndertrinnet består dette punkt i, at eleverne erhverver et første kendskab til og begyndende erfaringer med den faktiske anvendelse af elementær matematik i det nære dagligliv, i hjemmet, blandt kammerater, i fritidslivet og i familieøkonomi. Fokus vil være på spørgsmålet om, hvad matematik bruges til i disse sfærer.

B.3.2 Matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning

Karakteristik

Gennem hele grundskolen er genstanden for denne form for overblik og dømmekraft det forhold, at matematikken har udviklet sig i tid og rum, i kultur og samfund.

På begynder- og mellemtrinnet forventes det ikke, at der arbejdes eksplicit med udviklingen af denne form for overblik og dømmekraft.

På afsluttende trin forventes arbejdet ekspliciteret gennem eksemplarisk velvalgte anekdotiske nedslag i matematikkens historie i tilknytning til de indholdselementer, som i øvrigt er på banen.

Kommentar

Det er vigtigt at forsøge at lægge et historisk perspektiv på velvalgte dele af det faglige stof, man beskæftiger sig med, og ikke (kun) arbejde med de historiske sider af faget i selvstændige velafgrænsede forløb.

B.3.3 Matematikkens karakter som fagområde

Karakteristik

Som fagområde har matematikken sine egne karakteristika. Det er disse karakteristika, der *gennem hele grundskolen* er genstand for den foreliggende type overblik og dømmekraft. Nogle karakteristika har matematikken tilfælles med andre fagområder, andre er den ret alene om.

På begynder- og mellemtrinnet forventes det ikke, at der arbejdes eksplicit med udviklingen af denne form for overblik og dømmekraft.

På afsluttende trin forventes arbejdet ekspliciteret gennem diskussioner i tilknytning til beskæftigelsen med relevante indholdselementer.

Kommentar

At vi lægger op til, at det eksplicitte arbejde med denne form for overblik og dømmekraft primært finder sted på afsluttende trin, hænger sammen med, at de relevante indholdselementer, som diskussionerne kan knyttes an til, naturligt har tyngde på afsluttende trin, jf. grundskolekarakteristikken af ræsonnementskompetence på side 209 og af symbol- og formalismekompetence på side 215.

C Voksenuddannelser på grundskoleniveau: AVU og FVU

C.1 Generelle kommentarer

C.1.1 Generelt om voksenuddannelser

Voksenuddannelser konstituerer et afgørende træk ved det danske uddannelsessystem. Voksenuddannelser er dels de almene FVU, AVU og hf, dels de erhvervsrettede AMU og GVU, Grunduddannelse for Voksne. I alle voksenuddannelser indgår der matematik i forskellige varianter. For voksenuddannelserne er KOM-projektets intention central. Et fælles sprog om kompetencer kan gøre det lettere for udbyderne af uddannelse at kommunikere og tilpasse sig hinanden horisontalt og vertikalt, og dermed lette deltagernes overgange internt i uddannelsessystemet, og deres indgange og udgange i uddannelse.

Området er stort, og her behandler vi alene almene voksenuddannelser. De almene uddannelser for voksne ækvivalerer folkeskole og ungdomsuddannelser og er formuleret og tilrettelagt for voksne. Ydermere har vi indskrænket os, så vi ikke her behandler gymnasiale uddannelser for voksne, men koncentrerer os om kompetencebeskrivelse af de to almene voksenuddannelser, FVU, Forberedende voksenundervisning og AVU, Almen voksenuddannelse.

Vi ser ikke på erhvervs- og arbejdsmarkedsuddannelser for voksne i GVU og AMU, selv om matematik og matematiske kompetencer spiller en væsentlig rolle her. Beskrivelser heraf er en relevant og omfattende opgave, som bør varetages efterfølgende, og som blandt andet kan bygge på metoder og resultater fra projekt FAGMAT. GVU er ikke en ny uddannelse, men en ramme hvori tidligere uddannelse og erhvervserfaring suppleret med bl.a. erhvervsuddannelseselementer og AMU-uddannelser kan stykkes sammen til en formel faglig kompetence. GVU tager udgangspunkt i den enkelte kortuddannedes forudgående erfaringer og kvalifikationer, og for at begynde på en GVU skal man igennem en kompetencevurdering, fx på en erhvervsskole eller et AMU-center. Kompetencevurderingen skal dels vurdere de kurser, den enkelte har været på, dels vurdere den reelle kompetence, der er opnået gennem erhvervsarbejde. Når kompetencevurderingen har fundet sted, laves en uddannelsesplan. Inden for uddannelsesplanens gyldighed på seks år skal den kortuddannede så tage de AMU-uddannelser, erhvervsuddannelseselementer m.v., som skolen vurderer, vedkommende mangler for at kunne gå til svendeprøve.

C.1.2 Generelle kommentarer om forberedende voksenundervisning: FVU-matematik og om almen voksenuddannelse: AVU-matematik

Både FVU og AVU er almene voksenuddannelser, hvor undervisningen ikke peger frem mod et bestemt erhverv eller fagområde.

FVU: Formålet med forberedende voksenundervisning er at give voksne mulighed for at forbedre og supplere deres grundlæggende færdigheder i læsning, stavning og skriftlig fremstilling samt talforståelse, regning og basale matematiske begreber med henblik på videre uddannelse samt at styrke voksnes forudsætninger for aktiv medvirken i alle sider af samfundslivet. Undervisningen i FVU har p.t. to fag, FVU-læsning og FVU-matematik. FVU-læsning startede den 1. januar 2001, FVU-matematik startede 1. august 2001.

Undervisningen kan varetages af flere typer institutioner, såsom VUC, AMU, daghøjskoler, oplysningsforbund, SOSU-skoler. Undervisningen kan gennemføres på uddannelsesinstitutioner, men også på offentlige og private virksomheder, i foreninger og faglige organisationer. Undervisning der gennemføres lokalt, kan forbeholdes en bestemt kreds af deltagere. Ved afslutning af undervisningen på hvert trin tilbydes skriftlig prøve, som udformes specifikt til FVU-matematik. De øverste af FVU's uddannelsestrin overlapper til dels AVU's trin 1 og har erstattet basisundervisningen i Dansk og Matematik.

AVU: Almen voksenuddannelse er et tilbud til voksne over 18 år om at forbedre deres kundskaber i en række almene fag. AVU varetages af Voksenuddannelsescentre, VUC. AVU-matematik er et af de seks/syv kernefag, som ethvert VUC skal udbyde. Herudover kan centeret udbyde en række tilbudsfag. Fagene kan afsluttes med prøver, der giver samme ret til fortsat uddannelse som folkeskolens prøver efter 9. og 10. klasse.

FVU trindeling: FVU-matematik er delt op i to trin, trin 1 og trin 2. Slutniveauet på trin 2 ækvivalerer på visse områder AVU-trin 1's afgangsprøve.

AVU trindeling: FVU-matematik er delt op i to trin, trin 1 og trin 2. Slutniveauet på trin 2 ækvivalerer slutniveauet på folkeskolens 10. klasse.

FVU-matematik: Formålet med undervisningen i FVU-matematik er, ifølge fagbeskrivelsen, at sikre deltagerne mulighed for at afklare, forbedre og supplere deres funktionelle regne- og matematikfærdigheder. Undervisningen skal give deltagerne øgede muligheder for at kunne overskue, behandle og producere matematikholdige informationer og materialer. Undervisningen foregår med henblik på videre uddannelse, samt styrkelse af voksnes forudsætninger for aktiv medvirken i alle sider af samfundslivet. Med aktiv medvirken i alle sider af samfundslivet menes både på arbejdsmarkedet, som borger i et demokratisk samfund, og ved personlig organisering af hverdagen.

Begrebet numeralitet som hverdagskompetence indgår i fagets formål og mål, og angiver således den intenderede retning for undervisningen. Dermed er det centralt i fagbeskrivelse og undervisningsvejledning. *Numeralitet* defineres som funktionelle matematikfærdigheder og -forståelser, som alle mennesker *principielt* har brug for at have, og som ændrer sig med tid og sted, samfundsudvikling og teknologisk udvikling (jf. Lindenskov & Wedege; 1999).

Ligesom i AVU er begrebet numeralitet med i undervisningsvejledningen; dels som værktøj i tilrettelæggelse, dels som værktøj til at karakterisere hverdagens matematik med dens medier, intentioner, kontekster og begreber.

AVU-matematik: Formålet med undervisningen i AVU-matematik er ifølge fagbeskrivelsen at sikre kursisten mulighed for at tilegne sig viden og færdigheder for at kunne forstå og aktivt anvende matematik i såvel private som arbejds- og samfundsmæssige sammenhænge. Undervisningen skal give kursisten mulighed for at opnå sikkerhed i at overskue, analysere, beskrive og behandle autentiske data, informationer og problemstillinger af matematisk art.

De voksne deltagere skal have "mulighed for at opnå såvel demokratisk som personlig og videreuddannelsesmæssig kompetence." Undervisningen tager, ifølge undervisningsvejledningen, udgangspunkt i problemstillinger, kursisterne kan møde i dagligdagen. En matematisk disciplins praktiske anvendelse prioriteres højere end disciplinens teoretiske grundlag.

Ligesom i FVU er begrebet numeralitet med i undervisningsvejledningen: dels som værktøj i tilrettelæggelse, dels som værktøj til at karakterisere hverdagens matematik med dens medier, intentioner, kontekster og begreber. Men altså ikke som mål for undervisningen.

FVU-AVU: FVU-matematik og AVU-matematik adskiller sig fra hinanden med hensyn til, hvilke institutioner der varetager dem, og ved at begrebet numeralitet indgår i formål og mål for FVU-matematik, men altså ikke for AVU-matematik. Når formål og mål for FVU-matematik er ekstern funktionalitet, ikke intern brug af operationer og begreber til behandling af interne matematiske problemstillinger, så giver det en særlig vægtning og konkretisering af de otte matematiske kompetencer. Desuden vil man i FVU-matematik se de otte kompetencer i sammenhæng med hverdagskompetencen numeralitet, og de vil blive integreret heri. Det kan således minde om uddannelser, hvor matematik er hjælpefag.

Som det vil fremgå af det følgende, kan kompetencebegrebet med de otte matematikkompetencer anvendes på FVU-matematik og AVU-matematik som beskrivelsesmodel for dele af indholdet og af deltagernes udbytte. Undervisningen giver deltagerne mulighed for at oparbejde og bruge en bred vifte af de otte matematikkompetencer, og der er en progression i forløbet, bl.a. gennem flere åbne problemstillinger og selvvalgte emner.

C.2 Matematiske kompetencer i FVU- og AVU-matematik

C.2.1 Tankegangskompetence

Karakteristik

Denne kompetence består på disse trin for det første i *at være klar over* hvilke slags spørgsmål, som er karakteristiske for matematik, selv at kunne *stille sådanne spørgsmål*, og i at *have blik for hvilke typer af svar*, som kan forventes. Den består også i at *kende og håndtere* givne matematiske *begrebers rækkevidde* og begrænsning. Endelig består den også i at kunne *skelne* mellem *forskellige slags matematiske udsagn*. Kompetencen indeholder derimod ikke selve behandlingen af spørgsmål.

Kommentar

FVU: Matematisk tankegang er en ingrediens i FVU-matematik. Især mht. det at lægge mærke til hvilke matematikspørgsmål, der er karakteristiske i matematikundervisning og i hverdagen, selv at deltage i at stille sådanne spørgsmål og overveje hvilke typer af svar, som kan forventes. Arbejde med at skelne mellem forskellige typer udsagn kan også have en plads i FVU-matematik – det kan for nogle deltagere være en nyttig øjenåbner. At være opmærksom på de indgående begreber og operationers rækkevidde og begrænsning kan også have en funktionel betydning på dette trin.

AVU: Matematisk tankegang er en meget væsentlig ingrediens i AVU-matematik. Især mht. det at blive klar over, hvilke slags spørgsmål der er karakteristiske for matematik, selv at stille sådanne spørgsmål, og have blik for hvilke typer af svar som kan forventes. At kunne skelne mellem forskellige typer udsagn har en plads i AVU-matematik, ligesom det at kende og håndtere givne matematiske begrebers rækkevidde og begrænsning.

Eksemplificering

Matematisk tankegang har betydning for hvordan man omgås tal og diagrammer i informationsmaterialer. Matematisk tankegang angår fx hvilke karakteristiske spørgsmål, det er mest almindeligt at bruge de fire regningsarter til. Deltagerne må øge opmærksomheden på, hvilke spørgsmål de selv faktisk bruger disse til at besvare. Som illustration af det at lægge mærke til, hvilke matematikspørgsmål der er karakteristiske i hverdagen og i matematikundervisning, kan gives følgende eksempler:

FVU-1: Hvilke spørgsmål er det relevant at stille til tallene i dagens avisoverskrifter?

FVU-1&2: Hvilke spørgeord kan det være relevant at starte et spørgsmål med, når man tæller og måler?

FVU-1&2: I radioavisen 11. juni 2001 lød det: "Nye rapporter siger at østudvidelsen bliver mere end dobbelt så dyr som de 130 mia. kr. EU har forventet." Med en tankegangskompetence er man klar over at karakteristiske spørgsmål hertil kan være 'Hvor meget er egentlig 130 mia. kr.' og 'Hvad er fordobling for noget?', ligesom man er tilbøjelig til at stille sådanne spørgsmål.

Det forlød også i samme radioavis: "Storstrøms Amt mener, at der flyder med kemikalier fra Proms-forureningen 15-20 meter ned i jorden." Karakteristiske spørgsmål hertil kan være "Hvor meget er egentlig 15-20 meter?"

Som eksempler på forskellige typer udsagn, som man passivt skal kunne skelne imellem, kan nævnes

- "Når noget stiger med 100%, fordobles det."
- "Siderne i en kasse kaldes højde, bredde og længde."
- "Der er 27 439 indbyggere i Herlev Kommune."
- "Storkøb er billigere".

I håndtering af givne matematiske begrebers rækkevidde og begrænsning indgår der i FVU-matematik basal begrebsforståelse, såsom fornemmelse for størrelser, indsigt i forskellige former for brug af tal samt meningsindholdet i de fire regningsarter. Dette med henblik på aktivt at kunne vælge de rette regneoperationer til enkle spørgsmål som

- "Hvis man har budgetteret med en kuvertpris på 85,50 kr., og bruger 51,25 kr. på råvarer, hvor meget er der så til øvrige udgifter og overskud?"

I AVU-matematik kan tankegangskompetence illustreres med følgende karakteristiske spørgsmål vedrørende henholdsvis areal og omkreds af plane figurer og kombinatorik:

AVU-1: Du har et rektangel på 20 m^2. Hvor stor kan omkredsen være?

AVU-2: På hvor mange måder kan man udfylde en række i en tipskupon?

I relation til det at kende og håndtere matematiske begrebers rækkevidde og begrænsning vil man i AVU-matematik ofte have flere begreber i spil på en gang. Fx flere gennemsnitsmål på en gang, både absolutte og relative tal. Fx multiplikation sammen med andre regneoperationer. Karakteristiske spørgsmål kunne lyde:

AVU-1&2: Hvilke gennemsnitsmål er relevante i forhold til lønninger på en virksomhed?

AVU-1&2: På hvilken måde er det relevant at bruge absolutte og relative tal i beskrivelsen af udviklingen af sult i Afrika?

AVU-2: Hvorfor kan man gange, når man beregner, hvor mange måder man kan udfylde en række i en tipskupon på?

C.2.2 Problembehandlingskompetence

Karakteristik

Denne kompetence består dels i at kunne *opstille*, dvs. detektere, formulere, afgrænse og præcisere forskellige slags matematiske problemer, "rene" såvel som "anvendte", "åbne" såvel som "lukkede", dels i at kunne *løse* matematiske problemer i færdigformuleret form, igen både "rene" og "anvendte", "åbne" og "lukkede", egne såvel som andres, og om fornødent eller ønskeligt på forskellige måder.

Kommentar

I visse efterfølgende uddannelser og kurser står problemer og opgaver færdigformulerede, parate til at blive løst. I hverdagssituationer og i visse uddannelser og kurser er det ikke tilfældet, og derfor er en bred problembehandlingskompetence, hvor også formulering af problemer indgår, væsentlig.

FVU: At kunne formulere og løse hverdagsmatematiske problemer er meget centralt i FVU-matematik.

AVU: At kunne formulere og løse såvel hverdagsmatematiske som matematiske problemer er meget centralt i AVU-matematik, dvs. både problemer der angår matematikinterne forhold, og problemer der angår eksterne forhold.

Det er en generel intention for de almene matematikfag for voksne, at deltagerne er med til at stille opgaver, ikke kun til at behandle dem.

Eksemplificering

Som illustration af det at detektere, formulere, afgrænse, præcisere problemer samt deltage i behandling af dem, kan nævnes følgende områder:

FVU-1: Planlægning af indkøb af græsfrø for en nybygget andelsboligforening, som skal have anlagt en græsplæne.

FVU-1&2: Udfyldelse af timeseddel og lottoblanket.

FVU-1&2: Specifikt som forberedelse til et AMU-kursus kan problembehandlingskompetence udvikles gennem og anvendes til at vælge anhugningsudstyr til kranopgaver.

FVU-1&2: Overvejelser hos den voksne medborger i forhold til nyhedsstrømmen om spørgsmål og problemstillinger i fx nyhederne på morgenTV, som man i FVU-matematik kan hente hjælp til at behandle.

AVU-1: Overvejelser over hvordan det vil påvirke familiens økonomi, hvis moren går på nedsat arbejdstid.

AVU-2: Overvejelser over om det kan betale sig at skifte den gamle vaskemaskine ud med en ny, mere energirigtig.

AVU-1&2: Opstilling og behandling af problemstillinger og spørgsmål om modelbiler, fx under inddragelse af lineal og vægt.

C.2.3 Modelleringskompetence

Karakteristik

Kompetencen angår både eksisterende matematiske modeller og konstruktion af egne matematiske modeller. Væsentlige elementer for voksenundervisning er

- at kunne *analysere* grundlaget for og egenskaberne ved foreliggende modeller og at kunne bedømme deres rækkevidde og holdbarhed.
- at kunne *"afmatematisere"* (træk ved) foreliggende matematiske modeller, dvs. afkode og fortolke modelelementer og –resultater i forhold til det felt eller den situation, som er modelleret.
- at kunne *udføre aktiv modelbygning* i en given sammenhæng, herunder *strukturere*, *matematisere*, *behandle*, *validere*, *kritisk analysere*, *kommunikere*, *have overblik over* og kunne *styre* modelleringsprocessen.

Kommentar

I FVU-matematik indgår det at stille spørgsmål om forudsætninger for andres modeller vedrørende autentiske problemstillinger, at udnytte andres modeller, og at bygge egne simple modeller.

I AVU-matematik er det centralt at kunne analysere og bygge matematiske modeller vedrørende matematikeksterne forhold. I undervisningen kan kompetencen udvikles såvel med udgangspunkt i eksterne forhold, der skal modelleres, med udgangspunkt i fagets egne discipliner, fx *funktioner* og/eller *parabler,* eller med udgangspunkt i matematiske discipliner i videre uddannelse, fx *trigonometri.*

Eksemplificering

Som illustration af opbygning af egne modeller med udgangspunkt i eksterne forhold kan nævnes:

AVU-1: Opbygning af model, der beskriver udgiften til elektricitet, når den faste afgift er 350 kr. pr. kvartal og prisen pr. kWh er 1,17 kr.

AVU-2: Opbygning af model til beregning af gennemsnitsprisen, hvis man benytter ordningen *ØresundsPendler*.

AVU-1&2: Opbygning af model til prognose for stormagasinet *Magasins* samlede renteindtægter på "Konto 10" – et tilbud der var i funktion fra 16. maj til 15. juni 2001. Ordningen bestod i at dele betalingen i 10 månedlige rater, hvilket ville koste 10 kr. i rente om måneden.

AVU-2: Design af konstruktion og indretning af en havestue på 25 m^2 udført i træ og glas, inklusive angivelser af tagbjælkernes dimensioner, udgifter til materialer, finansieringstilbud, og brutto- og nettoudgifter ved kreditforeningslån.

AVU-1&2: Opstilling af model til sammenligning af forskellige rejsemåder mellem landsdele. Her indgår også indledende faser af modellering, fx med udvælgelse af en jysk og en sjællandsk by, afgørelse af hvordan sammenligningen skal foretages i henseende til tidsforbrug og pengeforbrug. Også i de afsluttende faser af modelleringen udvikles og anvendes modelleringskompetence ved overvejelser over hvilke faktorer, der spiller ind, når man i hverdagen vælger rejsemåde.

AVU-1&2: I overskrifter og annoncer i aviser, fagblade o.a. er der ofte procentangivelser. Modelleringskompetence udvikles og anvendes til at håndtere stigninger og fald i faktiske tal, til at vurdere procentangivelsernes oplysningsværdi og til at vurdere, hvorvidt oplysningerne kan gives på andre relevante måder.

C.2.4 Ræsonnementskompetence

Karakteristik

Kompetencen består på disse trin i at kunne *følge og bedømme* et *matematisk ræsonnement*, dvs. en kæde af argumenter fremsat af andre til støtte for en påstand, herunder at forstå den logiske betydning af et modeksempel, samt i at kunne *udtænke og gennemføre informelle ræsonnementer*(på basis af intuition).

Kommentar

I FVU-matematik hører det med at kunne følge og bedømme enkle matematiske ræsonnementer, herunder at forstå betydningen af et modeksempel. Mindre matematiske ræsonnementer kan være til støtte for deltagernes begrebsforståelse, fx af areal, af gennemsnit og af gangetabeller, og som forberedelse til videre uddannelse. Også det selv at kunne udtænke og gennemføre relativt simple informelle ræsonnementer i talmæssige og hverdagsmæssige sammenhænge kan indgå her.

Derimod er det at vide og forstå, hvad et matematisk bevis er, og hvordan det adskiller sig fra andre former for matematiske ræsonnementer, ikke med i FVU-matematik.

Det hører med i AVU-matematik at kunne følge og bedømme enkle matematiske ræsonnementer, herunder at forstå betydningen af et modeksempel. Der er en progression fra trin 1 til trin 2 i forhold til selv at udtænke og gennemføre mindre ræsonnementer. Ræsonnementskompetence er en støtte for forståelse af fagets substans, idet mindre matematiske ræsonnementer er en støtte for deltagernes begrebsforståelse, fx af areal, af gennemsnit og af sumformler. Ræsonnementskompetence er også en væsentlig forberedelse til videre uddannelse.

Eksemplificering

Følgende eksempler kan illustrere kompetencen:

FVU-1: Ræsonnement over hvorvidt formlen for arealet af en trekant - som det halve af arealet af et tilsvarende rektangel - er korrekt eller ej, og hvorfor. Overvejelser over om ræsonnementet kan visualiseres.

FVU-2: Modeksempler i ræsonnementer. Er det fx sandt, at ens gennemsnitsindkomst i to lande betyder ens mindsteindkomst?

FVU-1: Begrundelse for at der ingen ulige tal er i otte-tabellen.

AVU-1: Overvejelser over om det er rigtigt, at arealet af en cirkel fordobles, hvis radius fordobles.

AVU-1: Modeksempler i ræsonnementer, som i FVU-2, fx om hvorvidt ens gennemsnitsindkomst i to lande betyder ens mindsteindkomst.

AVU-2: Gennemførelse af et ræsonnement, der begrunder, at summen af de første tyve naturlige tal kan udtrykkes ved $10 \cdot 21$.

Også arbejde med åbne problemstillinger med flere løsningsmuligheder kan danne ramme for, at kursisten kan erkende, at matematik også omfatter argumentation og ræsonnement, i både matematikintern og ekstern henseende.

C.2.5 Repræsentationskompetence

Karakteristik

Kompetencen består her dels i at kunne *forstå* (dvs. afkode, fortolke og skelne mellem) og *betjene sig af* forskellige slags repræsentationer af matematiske objekter, problemer eller situationer (herunder symbolske specielt algebraiske, visuelle, geometriske, grafiske, diagrammatiske, tabelmæssige eller verbale repræsentationer), dels i at kunne forstå de indbyrdes *forbindelser* mellem forskellige repræsentationsformer for det samme sagsforhold, samt have kendskab til deres styrker og svagheder, herunder informationstab og -tilvækst, dels i at kunne *vælge* blandt og *oversætte* imellem forskellige repræsentationsformer for et givet sagsforhold, alt efter situation og formål.

Kommentar

Det at kunne håndtere forskellige repræsentationer er væsentligt for kursister på disse trin, både for selv at opbygge et stort repertoire af egne repræsentationer til forskellige områder og hensigter for at kunne forstå og forholde sig til informationsmaterialer fra hverdagen, og af hensyn til videre uddannelse.

Eksemplificering

Kompetencen kan illustreres med følgende eksempler:

FVU-1: Gangetabeller: Deltagernes eventuelle egne repræsentationer af gangetabeller afdækkes, og suppleres efter behov med andre repræsentationer. Repræsentationerne udnyttes til forskellige slags gange-opgaver. De kan have mental karakter, "sidde i fingrene", være forbundet med lommeregneroperationer, være mundtlige remser, eller have materiel eksistens i skemaer bag på et kladdehæfte, i grafer på papir og i konkrete materialer.

FVU-1&2: Fremskaffelse (gerne ved deltagerne selv) af informationsmateriale om fx det kommunale budget, det private elforbrug eller opsætning af køkkenelementer. Deltagerne fremstiller alternative præsentationer i andre medier og genrer, og diskuterer hvad præsentationerne henholdsvis skjuler og fremhæver.

FVU-1&2, AVU-1&2: Gennemførelse af en trafiktælling og fremstilling af resultaterne heraf på en hensigtsmæssig måde.

FVU-2, AVU-1&2: I arbejdet med åbne matematikholdige problemstillinger, som fx "Vores kommune – og de andres", vil der blandt andet indgå repræsentationskompetence.

AVU-1: Identifikation af $y = ax + b$ som forskriften for en lineær funktion, og skitsering af grafens mulige udseende.

AVU-2: Håndtering af $x_n = x_0(1+r)^n$ som en repræsentation af eksponentiel vækst.

C.2.6 Symbol- og formalismekompetence

Karakteristik

Kompetencen består på disse trin dels i at kunne *afkode* symbol- og formelsprog, i at kunne *oversætte* frem og tilbage mellem symbolholdigt matematisk sprog og naturligt sprog, og i at kunne *behandle og betjene sig af* symbolholdige udsagn og udtryk, herunder formler. Dels i *at vide*, at et matematisk system er bygget på begrebslig og logisk sammenhæng, bl.a. hvilende på ræsonnement og beviser.

Kommentar

FVU: Deltagerne afkoder symbol og formsprog i hverdagsmaterialer. Som noget meget centralt oversætter deltagerne til og fra naturligt sprog. De behandler og betjener sig af symbolholdige udtryk. Der er progression mellem trin 1 og trin 2, således at på trin 1 opstiller deltagerne konkrete regne*stykker* til behandling af enkle kvantificerbare spørgsmål, mens de på trin 2 opstiller regne*udtryk* til behandling af sådanne spørgsmål. I regneudtryk indgår der variable, mens regnestykker omhandler bestemte tal. Symbol- og formalismekompetence støtter og bidrager til begrebsforståelse. Indsigt i matematik som system er derimod ikke central på disse trin.

AVU: Deltagerne afkoder symbol og formsprog. Som noget helt centralt oversætter de til og fra naturligt sprog. De behandler og betjener sig af symbolholdige udsagn og udtryk, herunder formler. Symbol- og formalismekompetence støtter og bidrager til begrebsforståelse. Indsigt i matematik som system er derimod ikke central på disse trin.

Eksemplificering

Eksempler til illustration af kompetencen kan være:

FVU-1: Afkodning af talfremstillinger fra forskellige lande, it-systemer og arbejdspladser. Afkodning af forkortelser i diverse målesystemer.

FVU-1: Håndtering af hyppigt anvendte brøker og procenter. Heri indgår det at vide, at brøkdelen 1/4 svarer til 25%, at kunne udtale udtrykkene verbalt, og at kunne forbinde de to udtryk med dagligdags fænomener.

FVU-2, AVU-1&2: Kendskab til hvad hhv $2 \cdot (3+4)$ og $2 \cdot 3 + 4$ repræsenterer.

FVU-1: Beskrivelse i hverdagssprog af formlen for rumfang af en kasse.

FVU-2: Indsættelse af givne tal i formlen for volumenet af en cylinder, $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

AVU-1: Håndtering af brøker, procenter og decimaltal. Heri indgår det at vide, at brøkdelen 5/100 svarer til 5% og decimalbrøkdelen 0,05, at kunne afkode hvert af de tre udtryk, og at kunne oversætte dem til mundtligt naturligt sprog.

C.2.7 Kommunikationskompetence

Karakteristik

Denne kompetence består dels i at kunne *sætte sig ind i og fortolke* andres matematikholdige skriftlige, mundtlige eller visuelle udsagn og "tekster", dels i at kunne *udtrykke* sig på forskellige måder og på forskellige niveauer af teoretisk eller teknisk præcision om matematikholdige anliggender, skriftligt, mundtligt eller visuelt over for forskellige kategorier af modtagere.

Kommentar

FVU: Det at kommunikere i, med og om tal, figurer og symboludtryk er væsentligt i de funktionelle færdigheder og forståelser (numeralitet) som FVU-matematik sigter mod.

AVU: Det at kommunikere i, med og om matematik er væsentligt i AVU-matematik. Både den mundtlige og den skriftlige form for kommunikation er vigtig.

Eksemplificering

Kompetencen kan illustreres med følgende eksempler:

FVU-1: Undersøgelse af matematikholdige træk ved annoncer for forskellige varer, samt fremlæggelse af resultatet.

FVU-2: Undersøgelse og diskussion af matematikholdige kommunale dokumenter, som fx en kommunal el- og vandregning.

AVU-1: Undersøgelse af bilkøb af forskellige mærker og årgange, samt fremlæggelse af resultatet.

AVU-2: I arbejdet med det såkaldte selvvalgte problemområde, som indgår i uddannelsens trin 2, er kompetencen central. Ved den mundtlige prøve redegør deltageren for sit selvvalgte problemområde. På baggrund af arbejdet udarbejder kursisten et kort skriftligt oplæg, der danner grundlag for den mundtlige prøve. Den mundtlige redegørelse ledsages af plancher, grafer, tabeller eller lignende efter deltagerens eget valg.

C.2.8 Hjælpemiddelkompetence

Karakteristik

Denne kompetence består dels i at *have kendskab til* eksistensen og egenskaberne ved diverse former for relevante redskaber til brug for matematisk virksomhed, og have indblik i deres *muligheder og begrænsninger* i forskellige slags situationer, dels i at være i stand til på reflekteret vis at *betjene sig af* sådanne hjælpemidler.

Kommentar

Det at kunne betjene sig af og forholde sig til hjælpemidler, der bruges i hverdag og arbejde, er væsentligt i FVU-matematik. Heri indgår det at udnytte måleredskaber og at designe og producere egne hjælpemidler.

Det at kunne betjene sig af og forholde sig til hjælpemidler for matematisk virksomhed er væsentlig i AVU-matematik.

Eksemplificering

Kompetencen kan – ud over med oplagte eksempler vedrørende brugen af lommeregnere m.m., linealer og andre tegneredskaber osv. på FVU-niveau – illustreres med følgende eksempler:

AVU-1: Udnyttelse af it-baserede funktionsregne- og tegneprogrammer til at lære om lineære funktioner og deres egenskaber.

AVU-2: Udnyttelse af passer, lineal og vinkelmåler til konstruktion af geometriske figurer.

C.3 Overblik og dømmekraft vedrørende matematik som fagområde i FVU- og AVU-matematik

Selv om overblik og dømmekraft vedrørende matematikken som fagområde ikke er udtrykkeligt på dagsordenen for FVU- eller AVU-matematik, er det ikke desto mindre vigtigt, at kursisterne opnår et personligt indtryk af den samfundsmæssige brug af matematik (*Matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder*) og af dennes forbindelse med *Matematikkens karakter som fagområde*. Tilsvarende er det også ønskeligt, at kursisterne udvikler en fornemmelse af, at matematikken har udviklet sig historisk i kraft af menneskelig virksomhed (*Matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning*).

D Det almene gymnasium

D.1 Generelle kommentarer

I det almene gymnasium[1] undervises under den gældende bekendtgørelse i matematik på tre formelt kompetencegivende niveauer, hvis indhold og form groft kan skitseres som følger:

Matematik på *C-niveau* beskæftiger sig med nogle matematiske begreber og tankegange, man møder i hverdagen og i andre fag. Matematiske modeller står centralt i undervisningen. Formel kompetence på C-niveau kan opnås på forskellige måder (afhængigt af hvordan samspillet med naturfagsundervisningen er), som alle er forpligtet på, at omfanget svarer til 5 lektioner à 45 minutter pr. uge i et år.

Undervisningen på *B-niveauet* sigter mod, at eleverne erhverver indsigt i en række fundamentale matematiske tankegange, begreber og metoder, samt at eleverne opnår fortrolighed med matematik som et middel til at formulere, analysere og løse problemer inden for forskellige fagområder. Da undervisningen tillige sigter mod at tilvejebringe det faglige grundlag for A-niveauet, vil arbejdet med matematiske begreber og ræsonnementer være centralt i undervisningen, som skal tilrettelægges således, at tre såkaldte aspekter tilgodeses: "det historiske aspekt", "modelaspektet" og aspektet om "matematikkens indre struktur". Selvom der hvad pensum angår er en ikke ringe fællesmængde mellem B- og C-niveauet, er C-niveauet dog ikke en ægte delmængde af B-niveauet. Omfanget af B-niveau svarer til 5 lektioner à 45 minutter pr. uge i to år.

Det 1-årige forløb til A-niveau ligger i naturlig forlængelse af B-niveauet. Undervisningen sigter mod, at eleverne videreudvikler deres evne til at anvende matematiske begreber og metoder i rent matematiske sammenhænge og i sammenhænge, der kan bearbejdes og analyseres ved hjælp af matematik. I undervisningen er det derfor væsentligt, at begrebsopbygningen sker i vekselvirkning med anvendelsessituationer. I undervisningen arbejdes dybere med fagets abstrakte og ræsonnerende sider, således at eleverne får et tilstrækkeligt fagligt grundlag for senere at gå ind i matematikbaserede uddannelser, som kræver både regnemæssige færdigheder, kompetencer og teoretisk indsigt. Også her skal undervisningen tilrettelægges, så de tre ovennævnte aspekter tilgodeses. Omfanget af det 1-årige forløb til A-niveau svarer til 5 lektioner à 45 minutter pr. uge i et år.

[1] Ud over arbejdsgruppen har Erik von Essen og Karsten Wegener på afgørende måde bidraget til skabelsen af dette kapitel.

Eleverne har også den mulighed allerede efter 1. g. at lægge sig fast på, at de vil stile efter at få matematik på A-niveau. Et sådant *"langt" forløb til A-niveau* ("det 3-årige forløb")giver selvfølgelig mulighed for at tilrettelægge arbejdet med det faglige stof anderledes, end når der i kraft af B-niveauet er bestemte krav til, hvad der skal være nået efter to af de tre år, forløbet til A-niveau under alle omstændigheder tager.

Udover A-, B- og C-niveau udbyder det almene gymnasium også matematikundervisning som en del af det såkaldte*"naturfag"*. I dette fag, som er obligatorisk for – og kun tilbydes – elever på sproglig linje, er intentionen at undervise på en måde, der integrerer elementer, som inden for de traditionelle faggrænser hører under fysik, kemi og matematik.

Potentialer ved kompetencetilgangen

De *synergieffekter*, som naturfagets samtænkning af beslægtede fag lægger op til at skabe, mener vi, at en kompetencebeskrivelse af de respektive fag vil gøre det nemmere at sætte ord på og dermed bidrage til at stille skarpt på. Dette potentiale ved at se undervisningen gennem "kompetencebriller" er selvfølgelig ikke reserveret til en situation, hvor navnet på skoleskemaet direkte opfordrer hertil. Muligheden for at udnytte synergieffekter mellem fagene eksisterer ikke i kraft af, at fagene skemamæssigt er slået sammen, men i kraft af, at undervisningen kan tilrettelægges med tanke på samarbejde på tværs af fagene. Det er med dette som udgangspunkt, at vi i kapitel 11 anbefaler et "menugymnasium", der opererer med gennemtænkte og komponerede fagpakker.

Også hvad angår den mere snævre diskussion om forskelle og ligheder mellem de forskellige gymnasiale matematikniveauer, mener vi, at kompetencetilgangen potentielt kan virke afklarende. Det kan fx ske ved, at forskellige måder at opnå det formelt set samme matematikniveau på bringes til at handle om en eksplicit forskellig vægtning af de matematiske kompetencer, eventuelt kombineret med, at kompetencernes aktionsradius forsøges udviklet i forskellige retninger (sådanne forskelle er allerede en realitet for så vidt angår det "korte" og det "lange" forløb til A-niveau, men den svage artikulation heraf understreger behovet for at kunne supplere det eksisterende tilrettelæggelsesmæssige "ordforråd"). I kombination med eksistensen af forskellige niveauer vil det skabe en situation, hvor man kan diskutere og placere sig i forhold til forskellighed i to dimensioner; parallelle spor med hver deres "toning af kompetencepaletten" og niveauer inden for hvert spor som udtryk for "videre i samme retning".

At gå ind i en mærmere analyse af, hvordan disse og andre idéer eventuelt kan blive til mere end ord på papir, falder udenfor de rammer, vi har været nødt til at sætte for projektet her. Sådanne analyser bør være et led i det opfølgningsarbejde, som forhåbentlig følger efter afslutningen på KOM-projektet.

D.1.1 Læsevejledning

Karakteristikken i dette kapitel er *normativ*. Det betyder, at man som læser hverken skal se det som vores bud på “tingenes tilstand” eller som noget, man med rimelighed kunne forvente af eleverne her og nu. Karakteristikken gælder, hvad det efter vores mening er fornuftigt og realistisk at sætte op som pejlemærker for den almengymnasiale matematikundervisning i en tænkt fremtidig situation, hvor det almene uddannelsessystem, hvad matematikundervisningen angår, er reformeret i overensstemmelse med anbefalingerne i kapitel 11.

Vi har valgt at karakterisere, hvad der med den gældende bekendtgørelse svarer til det typiske C-niveau, det almengymnasiale B-niveau og dets etårige forlængelse til A-niveau som beskrevet ovenfor. At vi har foretaget dette valg, skal ikke ses som en anbefaling om at fastholde det omfang af de respektive niveauer eller den pensumfastlæggelse, som er inkorporeret i denne struktur, ej heller det modsatte. Det er en implementeringsrettet diskussion, som vi bevidst undlader at tage. Når vi refererer til de nævnte tre niveauer og (med få undtagelser) deres respektive pensum, er det således udelukkende, fordi vi mener, at det er hensigtsmæssigt med *en eller anden form for niveaudeling*, ikke mindst med tanke på at kunne fastsætte mål for den ønskede progression, og så har det været nemmest for os – og nok også for de fleste læsere af dette kapitel – at trække på vores erfaringer med det eksisterende.

Karakteristikken af den enkelte kompetence er for fleres vedkommende ikke, hvad dækningsgrad angår, afgrænset i forhold til grundkarakteristikken i kapitel 4 på noget af de tre trin. Det gælder problembehandlings-, modellerings-, repræsentations-, kommunikations- og hjælpemiddelkompetence. Den udvikling i elevernes kompetencebesiddelse, som man selvfølgelig også på disse felter bør forvente finder sted ifm. den gymnasiale matematikundervisning, bør derfor fokusere på to ting: Dels bør der ske en udvikling i, hvor *autonomt* eleverne udøver kompetencen, dels bør der ske en udvikling i kompetencebesiddelsens aktionsradius og tekniske niveau, jf. omtalen af de tre dimensioner i besiddelsen af en kompetence i afsnit 4.4.4 (side 64) og af progression i forhold til disse dimensioner i afsnit 9.3 (side 127).

Eksemplificeringen refererer i afsnittene om disse kompetencer gennemgående ikke til bestemte niveauer. Det skal ses som et signal om, at vi mener, at alle de anførte eksempler principielt kan bruges på alle gymnasiale niveauer. Progression vil så jf. ovenstående bla. komme til udtryk ved, hvilke matematiske teknikker, metoder, begrebsdannelser etc. eleverne er i stand til at angribe problemstillingerne med. Hvad der på dette punkt konkret kunne komme på tale på de respektive niveauer, overlader vi generelt trygt til læseren af vurdere, da vi som nævnt flere gange tidligere i rapporten ikke som en del af dette projekt ønsker at fokusere på detaljeret pensumfastlæggelse.

D.2 Matematiske kompetencer i det almene gymnasium

D.2.1 Tankegangskompetence

Karakteristik

På alle tre gymnasiale niveauer består denne kompetence for det første i at *være klar over*, hvilke slags spørgsmål som er karakteristiske for matematik, i selv at kunne *stille sådanne spørgsmål*, og i at *have blik for, hvilke typer af svar* der kan forventes. Af særlig vigtighed er her matematikkens efterstræbelse af nødvendige og tilstrækkelige betingelser for et objekts besiddelse af en given egenskab.

Den består tillige i at *kende*, *forstå* og *håndtere* givne matematiske *begrebers rækkevidde* (og begrænsning) og deres forankring i diverse domæner, i at kunne *forstå* hvad der ligger i *generalisering* af matematiske resultater, og selv at kunne generalisere sådanne til at omfatte en større klasse af objekter.

Denne kompetence omfatter også det at kunne *skelne*, både passivt og aktivt, mellem *forskellige slags matematiske udsagn* og påstande, herunder "betingede udsagn", "definitioner", "sætninger", "fænomenologiske påstande" om enkelttilfælde, og "formodninger" baseret på intuition eller erfaringer med specialtilfælde. Af særlig betydning er her forståelsen af den rolle, eksplicitte eller implicitte "kvantorer" spiller i matematiske udsagn, ikke mindst når de kombineres.

På A-niveau indgår desuden det at kunne følge udvidelsen af et begreb ved *abstraktion* af egenskaber i begrebet.

Kommentar

I forhold til grundskolens afsluttende trin er dækningsgraden her udvidet ved, at eleverne ud over kendskab til givne matematiske begrebers rækkevidde og begrænsning også skal kunne forstå og håndtere disse forhold som led i deres begrebsforståelse.

Fra C- til A-niveau er der, hvad dækningsgraden angår, lagt op til progression mht. hvor abstrakt, der arbejdes med de indgående begreber.

Der kan være grund til at understrege, at det at være i stand til at stille matematiske spørgsmål, som er karakteristiske for de respektive niveauer, ikke nødvendigvis indebærer, at man også kan besvare dem.

Eksemplificering

Nedenstående eksempler tjener til at belyse det *at være klar over, hvilke slags spørgsmål som er typiske i matematik, i selv at kunne stille sådanne spørgsmål, og i at have blik for de typer af svar, der kan forventes.*

- "Når grafen for en lineær funktion er en ret linje, vil enhver ret linje så kunne opfattes som graf for en lineær funktion?" (Nej, en lodret linje er ikke graf for en funktion).
- "Er en cirkel i et koordinatsystem nogensinde grafen for en funktion?"

  Et typisk svar på C-niveauet kan forventes at være: "Nej, for da vil der til samme x-værdi høre mere end én y-værdi", mens et svar på A-niveauet kan forventes at være: "Nej, for en funktion må have en entydig bestemt funktionsværdi i ethvert punkt i definitionsmængden".
- "Findes der et største tal i intervallet $]0;1[$?" (Nej, fordi vi til ethvert forelagt "største tal" kan lave et der er endnu større ved at tilføje flere decimaler).
- "Er $0,99999\ldots$ ikke det sidste tal før 1?" (Nej, det er lig med 1). Dette svar kan næppe forventes på C-niveauet, men derfor kan spørgsmålet sagtens stilles og forstås på dette niveau.
- "Hvorfor må man ikke gange med 0 på begge sider i en ligning?"

  På C-niveauet skal man næppe forvente et svar på dette spørgsmål, hvorimod et svar på B- eller A-niveau kan forventes at være: "Fordi man derved kan ændre løsningsmængden".

Med til tankegangskompetencen hører også at *kende, forstå og håndtere begrebers rækkevidde (og begrænsning) og deres forankring i diverse domæner.* Det kan fx være

- rækkevidden af et funktionsbegreb baseret på henholdsvis funktionsforskrifter og tilordninger. Domænet er her typisk en delmængde af de reelle tal, og når man blot siger at "vi indsætter et tal i forskriften", så skal eleverne være klar over, hvilket talområde der er på tale.

Med hensyn til at *forstå, hvad der ligger i en generalisering og selv kunne gennemføre en generalisering af et matematisk resultat*, vil vi nævne følgende eksempler:

- Eleverne skal på alle niveauer kunne gennemføre generaliseringen af sætningen om vinkelsummen i en trekant til en sætning om vinkelsummen i en n-kant. "Hvor mange trekanter kan en n-kant opdeles i?" vil være et oplagt spørgsmål at stille i denne sammenhæng.
- Sinus og cosinus til en spids vinkel defineres typisk vha. en standardtrekant – dvs. en trekant med hypotenusen 1. På B-niveauet kan dette begreb udvides vha. enhedscirklen til først til at omfatte alle vinkler og dernæst til en opfattelse af sinus og cosinus som egentlige funktioner.

Dette er et eksempel på en udvidelse af et matematisk begreb, hvor det sikres, at der til stadighed er overensstemmelse med den tidligere definition.

Udvidelsen af potensbegrebet og det bestemte integral er eksempler på udvidelser ved abstraktion af egenskaber i begrebet:

- Potensbegrebet introduceres på C-niveauet ved definitionen $a^n = a \cdot a \ldots a,\ n \in \mathbf{N}$, og udvides til $a^{-n} = {}^1\!/_{a^n}$ ($n \in \mathbf{Z}$). På B-niveauet foregår udvidelsen ved at forlange, at reglen $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ også skal være opfyldt i udvidelsen. Dette fører til et potensbegreb, der omfatter $a^p, p \in \mathbf{Q}$. Den sidste del af udvidelsen klares ved at introducere eksponentialfunktionen med grundtal a, og definere $a^x, x \in \mathbf{R}, a > 0$ ved hjælp af denne. På A-niveauet kommer kontinuitetsovervejelser og eksistens af eksponentialfunktionen ind i billedet.

- Det bestemte integral $\int_a^b f(x)\ dx$, hvor $a < b$, udvides til også at have mening for $a \geq b$ ved abstraktion af egenskaber i begrebet. Her forlanger vi, at indskudssætningen skal bevare sin gyldighed i udvidelsen.

Til illustration af det at *kunne skelne, både passivt og aktivt, mellem forskellige slags matematiske udsagn og påstande*, anføres følgende eksempler:

Betinget udsagn: "Hvis $a > 0$, så er $\sqrt{a^2} = a$."

Definitioner: "En lineær funktion er en funktion, som har en ret linje som graf."

"f er differentiabel i et punkt x_0, hvis..."

Sætninger: "En lineær funktion har forskriften $f(x) = ax + b$".

"$\sqrt{2}$ er et irrationalt tal."

"r er rod i polynomiet $P(x)$, hvis og kun hvis $x - r$ er divisor i $P(x)$".

"Ethvert tredjegradspolynomium har mindst én reel rod."

"Hvis en funktion er differentiabel i et punkt, så er den også kontinuert i punktet."

"Hvis f er kontinuert i $[a;b]$, og $f(a)$ og $f(b)$ har modsatte fortegn, så findes der et $c \in]a;b[$, således at $f(c) = 0$."

Fænomenologisk påstand: "6 er et eksempel på et perfekt tal, fordi det er summen af sine egentlige divisorer."

Formodning: "Jeg tror, at kvadratroden af et primtal altid er irrationalt."

D.2.2 Problembehandlingskompetence

Karakteristik

På alle tre gymnasiale niveauer består denne kompetence dels i at kunne *opstille*, dvs. detektere, formulere, afgrænse og præcisere forskellige slags matematiske problemer, "rene" såvel som "anvendte", "åbne" såvel som "lukkede", dels i at kunne *løse* sådanne matematiske problemer i færdigformuleret form, egnes såvel som andres, og om fornødent eller ønskeligt på forskellige måder.

Kommentar

Et matematisk problem er en særlig type matematisk spørgsmål, nemlig ét hvor en matematisk undersøgelse er nødvendig for besvarelsen. Spørgsmål, som kan besvares alene ved hjælp af (få) specifikke rutinefærdigheder, henregnes således ikke som matematiske problemer.

Det er meget vel muligt at kunne formulere matematiske problemer uden at være i stand til at løse dem. Tilsvarende er det muligt at være en dygtig problemløser uden at være god til at finde og formulere matematiske problemer.

Ligesom det var tilfældet på grundskolens afsluttende trin, er dækningsgraden her ikke afgrænset i forhold til grundkarakteristikken i kapitel 4. Arbejdet med at udvikle elevernes besiddelse af kompetencen bør derfor fokusere på andre ting, jf. kommentarerne i afsnit D.1.1 (side 243).

Eksemplificering

Som eksempel på det at *løse* og i nogle af tilfældene eventuelt selv *finde og formulere* matematiske problemer, vil vi – i den "lukkede" afdeling, hvor der eksisterer ét entydigt rigtigt svar – nævne følgende:

- "Lav en målepind (eller en omsætningstabel eller en regneforskrift for en funktion) til bestemmelse af væskeindholdet af en cylinderformet beholder, der ligger på siden. Beholderen er 6 meter lang, og diameteren er 1 meter."

  Problemet er naturligvis, at beholderen ligger på siden – var den placeret på endefladen, var opgaven triviel. For tre værdier kan indholdet let bestemmes: Når beholderen er tom, halvfyldt eller helt fyldt.

  For at løse opgaven, må eleverne være bekendt med, at rumfanget svarende til en væskestand på h cm kan bestemmes som produktet af arealet af "grundfladen" og længden af beholderen. Herefter er problemet reduceret til at bestemme arealet af et cirkelafsnit.

Stilles opgaven på A-niveau, kan dette areal bestemmes som arealet mellem de to funktioner $f(x) = r - \sqrt{r^2 - x^2}$ og $g(x) = h$:

$$A = 2\int_0^{\sqrt{2\pi rh - h^2}} h - r + \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

Dette leder til et integral, der ikke er standard på A-niveau, hvorfor grafregner, CAS-program eller en integraltabel må anvendes.

Hvis opgaven stilles på B-niveau, kan arealet bestemmes som $A = \frac{1}{2}r^2\left(v - \sin(v)\right)$, hvilket giver arealet som en funktion af v, men ikke af h, som ønsket. Udtrykt som funktion af h fås

$$A = \tfrac{1}{2}r^2\left(\cos^{-1}\left(1 - \tfrac{h}{r}\right) - \sin\left(2\cos^{-1}\left(1 - \tfrac{h}{r}\right)\right)\right)$$

Herefter kan man benytte en grafregner, et regneark eller et CAS-værktøj til at generere den ønskede omsætningstabel.

I de følgende eksempler vil vi overlade det til læseren selv eventuelt at forestille sig varianter af opgaveformuleringen eller den valgte løsningsstrategi, som kan gøre eksemplet egnet på alle de gymnasiale niveauer:

- “Hvor store er vinklerne i en regulær n-kant?”
- “Hvor mange cifre er der i tallet 2^{1024}?”
- “Opskriv tallene 2^{800}, 3^{500}, 4^{400} og 6^{300} i rækkefølge efter størrelse.”
- “Opskriv et system af to ligninger med to ubekendte, hvis løsning er koordinatsæt til et punkt i fjerde kvadrant.

  Hvilke ændringer af koefficienterne vil gøre, at løsningen flytter op i første kvadrant?”
- “Under udsalg får man ofte rabat som en procentdel af varens normale pris. Er det smartest at bede om at få rabatten trukket fra, før eller efter momsen lægges til prisen?”
- “En tur med en rulletrappe tager 20 sekunder, hvis man lader rulletrappen gøre hele arbejdet, og 10 sekunder, hvis man løber op ad den rullende trappe. Hvor lang tid tager det at løbe op, hvis rulletrappen står stille?”
- “En ny rapport fra Københavns Politi tegner et dystert billede. Mennesker af udenlandsk herkomst udgør 16 procent af indbyggerne i København, men står for 42 procent af voldssagerne.” (*Aktuelt* 26. november 1999).

  Hvor mange gange mere voldelige er mennesker af udenlandsk herkomst end mennesker af dansk herkomst i gennemsnit ifølge disse oplysninger?

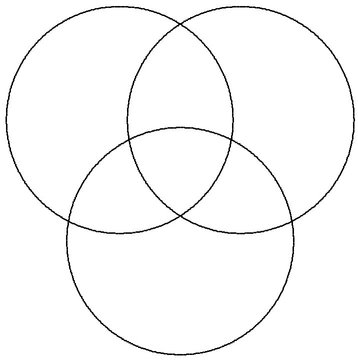
- "Inden i en ligebenet trekant med sidelængderne 5, 5 og 6 lægges en anden ligebenet trekant på hovedet, således at grundlinjerne er parallelle. Hvad skal sidelængderne være i den indskrevne trekant, for at dens areal bliver så stort som muligt?"

- "Hvad er forholdet mellem arealet af en cirkels indskrevne og omskrevne ligesidede trekant?"

- "Hvor stor en del af en kugles volumen udgør den indskrevne terning?"

- "Ved en undersøgelse af ferieerfaringer, som omfattede 78 elever, havde 49 været i Sverige, 15 i Finland, 22 i Norge, 12 i både Sverige og Finland, 18 i både Sverige og Norge, 6 i både Finland og Norge og 5 i alle tre lande.

  Hvor mange af de deltagende elever havde ikke besøgt nogen af de tre andre nordiske lande?" (som mulig graduering af sværhedsgraden kan eventuelt tilføjes: "Figuren her kan måske være en hjælp, hvis hvert land repræsenteres af en cirkel.")

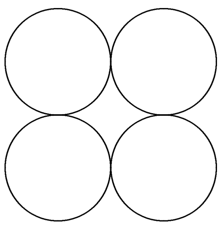


- "To ens kvadrater tænkes anbragt, så et af hjørnerne i det ene kvadrat er placeret i midten af det andet kvadrat. Hvordan skal de drejes i forhold til hinanden for at arealet af det stykke, de overlapper, bliver størst muligt?"

- "Et muligvis lettere ubrugelig ordbog består af alle kombinationer af bogstaverne i ordet *Bogstav*. Dette ord er det første ord i ordbogen og definerer derved rækkefølgen af bogstaverne. Hvilket ord kommer lige efter "vogbast"?"

- "Fire cirkler er, som skitseret på figuren her, placeret symmetrisk, så de uden at overlappe danner et lukket område mellem sig.

  Hvad er arealet af dette område?"



Det fremgår, at nogle af problemerne er af internt matematisk art, dvs. alene angår tal- eller størrelsesbegreber eller geometriske begreber om rummet (inklusive planen), mens andre refererer til genstande og fænomener fra verden uden for matematikken. De udenomsmatematiske problemer er (jf. kommentaren i afsnit 4.2.2) rubriceret under denne kompetence og ikke under modelleringskompetencen, fordi løsningen af dem ikke forudsætter hypoteser om og afgrænsning af det virkelighedsudsnit, der er tale om.

I den mere mere "åbne" afdeling, hvor det vil være selvmodsigende at anvise et kort og entydigt svar, kan følgende "rene" opgaver tjene som eksempler:

- "Opskriv $\frac{1}{7}$ som sum af to eller flere stambrøker (dvs. brøker hvis nævner er 1).

  Opskriv på samme måde en sum med resultatet $\frac{1}{n}$."

Hvad angår opgaver, som kan karakteriseres som "åbne" og "anvendte", har udfordringen en karakter, som gør, at det i første omgang er modelleringskompetence, der skal bringes i spil, jf. kommentarerne til nedenstående afsnit, som også rummer adskillige eksempler.

D.2.3 Modelleringskompetence

Karakteristik

På alle tre gymnasiale niveauer består denne kompetence på den ene side i at kunne *analysere* grundlaget for og egenskaberne ved foreliggende modeller og at kunne bedømme deres rækkevidde og holdbarhed. Hertil hører at kunne "*afmatematisere*" (træk ved) foreliggende matematiske modeller, dvs. at kunne afkode og fortolke modelelementer og -resultater i forhold til det felt eller den situation som er modelleret. På den anden side består kompetencen i at kunne *udføre aktiv modelbygning* i en given sammenhæng, dvs. at bringe matematik i spil og anvendelse til behandling af anliggender uden for matematikken selv.

Aktiv modelbygning indeholder en række forskellige elementer. Først at kunne *strukturere* det felt eller den situation, der skal modelleres. Dernæst at kunne gennemføre en *matematisering* heraf, dvs. en oversættelse af objekter, relationer, problemstillinger m.v. til et område af matematikken, resulterende i en matematisk model. At kunne *behandle* den opståede model, herunder løse de matematiske problemer den måtte give anledning til, samt at kunne *validere* den færdige model, dvs. bedømme dens holdbarhed både internt (i forhold til modellens matematiske egenskaber) og eksternt (dvs. i forhold til det felt og den situation modellen omhandler). Der indgår tillige at kunne *analysere modellen kritisk*, både i forhold til dens egen brugbarhed og relevans og i forhold til mulige alternative modeller, og at kunne *kommunikere* med andre om modellen og dens resultater. Endelig indgår det i aktiv modelbygning at have *overblik* over og kunne *styre* den samlede modelleringsproces.

Kommentar

Ligesom det var tilfældet på grundskolens afsluttende trin, er dækningsgraden her ikke afgrænset i forhold til grundkarakteristikken i kapitel 4. Arbejdet med at udvikle elevernes besiddelse af kompetencen bør derfor fokusere på andre ting, jf. kommentarerne i afsnit D.1.1 (side 243).

Eksemplificering

På trods af, at den "undersøgende" og den "produktive" side af modelleringskompetence i praksis oftest vil være på banen samtidigt, vil vi for illustrationens skyld splitte eksemplificeringen op på udfordringer, som vi mener overvejende peger i henholdsvis den ene og den anden retning.

Den del af modelleringskompetencen, som består i at *analysere grundlaget for og egenskaberne ved foreliggende modeller og at kunne bedømme deres rækkevidde og holdbarhed*, kan fx igangsættes vha. følgende spørgsmål:

- "Hvordan virker en cykel-computer?"
- "Hvordan virker GPS-navigering?"
- "I forbindelse med en kampagne for at nedsætte farten i byerne bruges sloganet "10 = 44". Hvad er meningen?"
- "Hvor hurtigt svinger et pendul?"
- "Hvad er det optimale design af en vindmøllevinge?"
- "Hvordan benytter landmålere sig af matematik?"
- "Hvordan fastsættes prisen på en vare?"
- "Hvordan laver man stikprøveundersøgelser?"
- "Hvordan laver man opinionsundersøgelser?"
- "Hvordan kan man vurdere atomkraftværkers sikkerhed?"
- "Hvor sikker er en vejrudsigt?"

Med hensyn til det at kunne *udføre aktiv modelbygning*, er det som nævnt i karakteristikken et afgørende træk, at man som en del af udfordringen skal forholde sig *strukturerende* til virkeligheden. Denne del af arbejdsprocessen kan få meget forskelligt omfang, alt efter hvor kompleks og diffus udfordringen er i udgangspunktet, og hvor meget den mere eller mindre eksplicit kræver inddragelse af andre ting (hjælpemidler, data, udefrakommende personer etc.) end de i situationen forhåndenværende. Da det er en afgørende ting at forholde sig til, når man skal tilrettelægge arbejdet med sigte på modellleringskompetence, vil vi splitte eksemplificeringen op i oplæg til henholdsvis *kortere- og længerevarende modelleringsaktiviteter*. De korterevarende oplæg er karakteriseret ved, at vi forestiller os, at man meningsfyldt kan tage udfordringen op i klasseværelset inden for rammerne af en lektion eller to. Derimod vil de nævnte oplæg til længerevarende modelleringsprocesser givet kræve, at man sprænger disse rammer.

Først eksemplerne på *korterevarende modelleringsforløb:*

- Hvor højt skal et snapseglas skænkes for at være halvt fyldt?

  For at løse denne opgave skal man først bestemme sig for glassets form. Her vil det være nemmest at tage udgangspunkt i et kegleformet glas.

  På C- og B-niveau kan opgaven for et kegleformet glas løses vha. ensvinklede trekanter og formlen for en kegles rumfang. Opgaven kan lettes ved at sætte keglens højde til 1. Svaret bliver $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, eller med andre ord 79%.

  På A-niveau kan opgaven løses på en måske knap så elegant måde ved at bestemme rumfang af omdrejningslegemer.

- “Hvor meget kan en kran løfte?”

- “Når to personer sammen skal bære en stige (eller en anden lang genstand), vil man normalt tage fat i hver sin ende. Hvis de to personer ikke er lige stærke kan den stærkeste imidlertid aflaste den mindre stærke ved at tage fat længere inde på genstanden.

  Hvordan afhænger fordelingen af belastningen af, hvor den stærkeste tager fat?”

- “Hvor langt væk er horisonten?”

- “Hvilken vinkel skal en solfanger anbringes i?”

- “Hvor lang en stige kan man få rundt om et hjørne?”

- “Hvilken vej skal en livredder, som befinder sig et stykke oppe på en strand, vælge ud til en person, som er ved at drukne?”

- “Ved hvilken vinkel vælter et skævt tårn?”

- “Hvor langt bevæger nålen sig under afspilning af en grammofonplade?”
- “Karakterisér temperaturudviklingen i et glas isvand.”
- “Karakterisér udviklingen i antallet af kinesere med den nuværende etbarnspolitik, hvor det gøres meget besværligt at have mere end ét barn.”

Som eksempler på oplæg til *længerevarende modelleringsforløb* vil vi nævne følgende:

- “Hvad er sammenhængen mellem ens indkomst og den skat, man betaler?”
- “Hvor lang tid går der, før man er ædru, hvis man har drukket?”
- “Hvor dyrt er det at tale i mobiltelefon?”
- “Hvor mange molekyler er der i et stykke kridt?”
- “Hvor lang tid før man ønsker at drikke den, skal en øl sættes i køleskabet?”
- “Hvordan udvikler antallet af AIDS-tilfælde i Danmark sig?”
- “Hvordan kan man sejle i andre retninger end med vinden i en sejlbåd?”

D.2.4 Ræsonnementskompetence

Karakteristik

På alle tre gymnasiale niveauer består denne kompetence på den ene side i at kunne *følge* og *bedømme* et *matematisk ræsonnement*, dvs. en kæde af argumenter fremsat af andre på skrift eller i tale til støtte for en påstand, specielt at vide og *forstå* hvad et matematisk *bevis* er, og hvordan det adskiller sig fra andre former for matematiske ræsonnementer, fx heuristiske ræsonnementer hvilende på intuition eller på betragtning af specialtilfælde. Heri indgår at forstå den logiske betydning af et *modeksempel*.

På den anden side består kompetencen i at kunne *udtænke og gennemføre* informelle og *formelle ræsonnementer* (på basis af intuition). I den forbindelse bør eleverne gøre sig *eksemplariske erfaringer* med selv at omforme heuristiske ræsonnementer til egentlige (gyldige) beviser.

På B- og A-niveau indgår desuden det at kunne afgøre, hvornår et matematisk ræsonnement faktisk udgør et bevis, og hvornår ikke, samt det at kunne *forstå en redegørelse for, hvad der er de bærende idéer i et matematisk bevis*, herunder skelne mellem hovedpunkter og detaljer, mellem idéer og teknikaliteter.

På A-niveauet udvides dækningsgraden yderligere ved, at eleverne ikke blot forventes at kunne forstå en redegørelse for, men også selv at kunne *afdække de bærende idéer i et matematisk bevis*.

Kommentar

I forhold til grundskolens afsluttende trin er dækningsgraden her udvidet ved, at eleverne skal gøre sig mere end eksemplariske erfaringer med forbindelsen mellem ræsonnementer generelt og beviser som specialtilfælde. Desuden lægges der her på forskellig vis op til at tage fat på arbejdet med, hvad der er de bærende idéer i et matematisk bevis, hvilket ikke er på dagsordenen i grundskolekarakteristikken.

I forhold til grundkarakteristikken i kapitel 4 er dækningsgraden her afgrænset ved, at eleverne kun skal gøre sig eksemplariske erfaringer med at omforme heuristiske ræsonnementer til egentlige beviser, ikke som i grundkarakteristikken *kunne* det i nogen mere krævende betydning af dette ord.

Af mange betragtes matematisk bevisførelse, men også matematisk ræsonneren i almindelighed, som en sag, der først og fremmest angår retfærdiggørelsen af matematiske sætninger, endda ofte i form af ren og skær gengivelse af færdige beviser. Ræsonnementskompetencen omfatter også dette, men går videre, idet den kommer i spil overalt, hvor det gælder om at bedømme holdbarheden af matematiske påstande, inklusive at overbevise sig selv eller andre om den eventuelle gyldighed af sådanne. Det kan dreje sig både om reglers og sætningers rigtighed, men også om godtgørelsen af, at givne svar på spørgsmål, opgaver, eller problemer er korrekte og fyldestgørende. Ved således også at omhandle retfærdiggørelsen af svar og løsninger, er ræsonnementskompetencen intimt forbundet med både problembehandlings- og modelleringskompetencerne. Den udgør så at sige disses "juridiske" side.

De beviser, der arbejdes med, bør afspejle den begrebsforståelse, der i øvrigt arbejdes med i undervisningen. Hvis man eksempelvis på B-niveauet har et rent intuitivt grænseværdibegreb, bør beviser for regneregler for differentialkvotienter bygge herpå, medmindre man bevidst vælger at bruge arbejdet med velvalgte beviser som middel til netop at udfordre – og forhåbentlig dermed udvikle – den eksisterende begrebsforståelse.

Eksemplificering

Størstedelen af eksemplerne nævnt i forbindelse med problembehandlingskompetence vil kunne genbruges her, hvis man lægger fokus på måden, udfordringen tages op på. Her vil vi af pladshensyn nøjes med nogle få udfoldninger af sådanne tænkte reaktioner.

Scenario: I en klasse spiller eleverne to og to et spil: På udleverede ark er anbragt hjørnerne i en regulær 6-kant. Spillet går ud på, at man efter tur forbinder to hjørner i 6-kanten med hver sin farve (rød/grøn). Den, der først bliver nødt til at forbinde to punkter, så der dannes en ensfarvet trekant, har tabt spillet. Spillet spilles mindst 10 gange.

L: Kan dette spil ende uafgjort?

E_1: Nej, vi har hver gang haft en vinder.

L: Er der nogen, der har et spil, der er endt uafgjort?

E_2: Nej.

L: Kan vi argumentere for, at der altid vil være en vinder? Med andre ord: Vil der ved denne farvning af en 6-kant altid opstå en ensfarvet trekant?

E_1: Vi kunne vel gå alle muligheder efter?

E_2: Hvor mange er der? Der er 15 streger, der skal farves – 8 streger i den ene farve, 7 i den anden.

E_1: – så det er nok en håbløs opgave. (Forgår dette på et tidspunkt eller niveau, hvor kombinatorik ikke har været behandlet, må eleverne på anden vis overbevise hinanden om, at der er mange muligheder.)

L: Vi må nok vælge en anden fremgangsmåde. Prøv at se på et enkelt hjørne i jeres figurer – kan man sige noget om farvningerne af de enkelte linjer?

E_1: Ja, der vil altid være mindst tre, der har den samme farve.

L: Så vi kan antage, at der fx er tre røde. Prøv at se på endepunkterne af disse.

E_1: Hvis to af disse forbindes med en rød streg, så er der en rød trekant.

E_2: Ja, men hvis de alle forbindes med en grøn streg, så kommer der jo en grøn trekant.

L: Så gælder det bare om at få ræsonnementet skrevet pænt ned. Det kan I gøre nu sammen med jeres makker.

L: Overvej herefter følgende spørgsmål:

1. Findes der en vinderstrategi? (Nej, den der starter, vinder)
2. Prøv at spille spillene helt til ende. Hvad kan bemærkes? (At der altid er en rød trekant og en grøn trekant)
3. I ovenstående spil farves 6-kanten ved, at 8 sider farves rød og 7 sider farves grøn – eller omvendt. Antag nu, at vi dropper dette krav og ser på en vilkårlig farvning i to farver. Prøv at formulere og bevise en sætning om en vilkårlig farvning af en 6-kant med to farver.

Spilles spillet på A-niveauet kan man udbygge med:

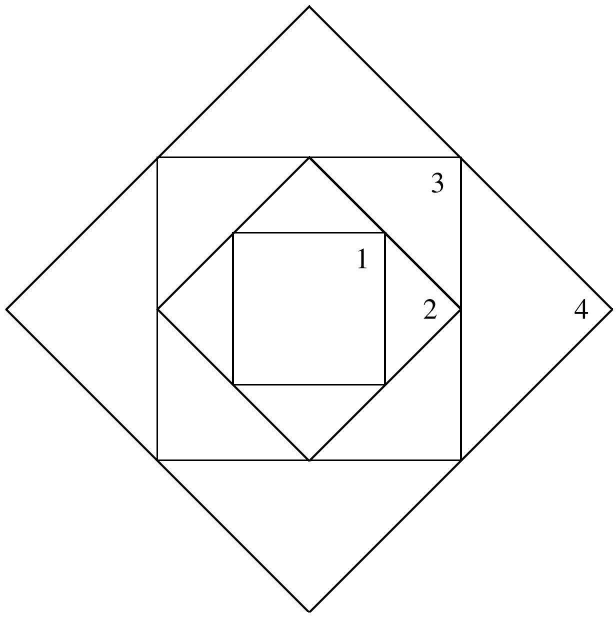
- Bevis, at der i enhver forsamling på 6 personer er enten 3, der kender hinanden, eller 3, der ikke kender hinanden.

Lignende udspændinger hen over de forskellige niveauer kan tage udgangspunkt i opgaver som

- "En række punkter på et stykke papir forbindes med streger. Hvis der kun må gå én streg mellem to punkter er der selvfølgelig en grænse for hvor mange streger man kan tegne; én streg hvis der er to punkter; tre streger, hvis der er tre punkter, osv. Hvor mange streger kan man tegne, hvis der er n punkter?"

- Tegningen her skal illustrere en situation, hvor kvadrat 2 er drejet 45° i forhold til kvadrat 1, kvadrat 3 er drejet 45° i forhold til kvadrat 2, osv.

  Hvad er forholdet mellem arealet af kvadrat 1 og kvadrat n?



- "I spillet "Tårnene i Hanoi" skal man flytte et antal cirkelskiver med hul i midten fra den ene af tre pinde til en anden af pindene. Man må kun flytte en skive ad gangen fra en pind til en anden. Cirkelskiverne er af forskellig størrelse og må ifølge reglerne aldrig ligge med en større skive oven på en mindre. Fra starten ligger de derfor også med den største skive nederst, så den næststørste osv. frem til den mindste, som ligger øverst.

  Hvad er det mindste antal skiveflytninger, der skal til, hvis der er n skiver at flytte?"

- "A, B og C har udfordret hinanden på pistol. A træffer dødeligt med 100% sikkerhed, B med 80% og C kun med 50%. De stiller sig op i en ligesidet trekant og må nu skyde et skud af gangen efter tur. Der trækkes lod om starttrækkefølgen. Hvad er hver af de tre personers chance for at overleve?"

Med hensyn til det at *kunne følge et matematisk bevis*, hvor argumentationen bygger på udregninger og/eller geometriske ræsonnementer, skal eleverne på alle niveauer kunne forstå

- et bevis for, at vinkelsummen i en trekant er 180°.
- et bevis for, at hældningskoefficienten for en lineær funktion kan beregnes ud fra to punkter på grafen.

I kompetencen indgår også at kunne *forstå, hvordan en "sætning" kan dementeres af et enkelt modeksempel*. Det kan fx optræde ved

- arbejde med regneregler for kvadratrødder, hvor eleverne på den måde skal kunne indse, at "sætningen" $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ ikke gælder.

På B- og A-niveauet hører det med til ræsonnementskompetencen at kunne følge mere komplicerede beviser, herunder at kunne skelne mellem et bevis for en sætning af typen "Hvis ... så ..." og et bevis for den omvendte sætning. I geometri kan man fx inddrage

- såvel Pythagoras' sætning for den retvinklede trekant som den omvendte sætning hertil, og eleverne skal kunne forstå forskellen mellem disse sætninger.

Tilsvarende skal de ved bevisførelse for sætninger om specielle funktioner fx kunne

- forstå forskellen mellem at bevise "hvis" og "kun hvis" i den sætning, der siger, at en funktion er en eksponentiel udvikling, hvis og kun hvis dens graf i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem er en ret linie.

På A-niveauet skal eleverne kunne magte mere krævende beviser, fx

- beviset for, at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal.
- beviset for, at metoden til løsning af førsteordens differentialligninger ved separation af de variable er korrekt.

Det indgår i kompetencen på B- og A-niveau at kunne afgøre, om et givet matematisk ræsonnement faktisk udgør et bevis. Eleverne skal således i simple situationer være i stand til at indse og forklare, om et givet ræsonnement udgør et korrekt bevis for en given påstand. Eksempelvis kan elever få opgaven

- at finde fejlen i et ukorrekt bevis og forklare, hvori det fejlagtige består.

I mere komplicerede situationer kan der være behov for at danne sig et overblik over bevisførelsen, som fx

- på B- eller A-niveau at kunne forstå en redegørelse for, hvad der er de bærende ideer i ræsonnementerne i forbindelse med en generel behandling af andengradspolynomiets graf, herunder toppunkt og rødder.

Med til kompetencen hører desuden i simple situationer selv at kunne udtænke matematiske ræsonnementer, fx

- på baggrund af et bevis for, at $\sqrt{2}$ er et irrationalt tal, at kunne ræsonnere sig frem til, at $\sqrt{8}$ er et irrationalt tal, fordi

  $$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2}$$

  og produktet af et rationalt og et irrationalt tal er irrationalt.

- på baggrund af et bevis for, at vinkelsummen i en trekant og en firkant er henholdsvis 180° og 360°, at kunne udtænke et ræsonnement for, at vinkelsummen i en n-kant er $(n-2) \cdot 180°$.

- at skulle bevise, at summen af tre på hinanden følgende hele tal altid er delelig med 3.

- at bevise, at kvadratet på et lige tal igen er et lige tal, samt at kvadratet på et ulige tal igen er et ulige tal.

D.2.5 Repræsentationskompetence

Karakteristik

På alle tre gymnasiale niveauer består denne kompetence dels i at kunne *forstå* (dvs. afkode, fortolke og skelne mellem) og *betjene sig af* forskellige slags repræsentationer af matematiske objekter, fænomener, problemer eller situationer (herunder symbolske, specielt algebraiske, visuelle, geometriske, grafiske, diagrammatiske, tabelmæssige eller verbale repræsentationer, men også konkrete repræsentationer ved materielle objekter), dels i at kunne forstå de indbyrdes *forbindelser* mellem forskellige repræsentationsformer for det samme sagsforhold og have kendskab til deres styrker og svagheder, herunder informationstab og -tilvækst, dels i at kunne *vælge* blandt og *oversætte* imellem forskellige repræsentationsformer for et givet sagsforhold, alt efter situation og formål.

Kommentar

Ligesom det var tilfældet på grundskolens afsluttende trin, er dækningsgraden her ikke afgrænset i forhold til grundkarakteristikken i kapitel 4. Arbejdet med at udvikle elevernes besiddelse af kompetencen bør derfor fokusere på andre ting, jf. kommentarerne i afsnit D.1.1 (side 243).

Eksemplificering

Med hensyn til det *at have kendskab til forskellige repræsentationsformer* for de matematiske begreber, der er centrale på det pågældende niveau, og *at kunne fastlægge én type repræsentation ud fra en anden*, handler det i forbindelse med arbejdet med funktioner om at

- kende forskellige repræsentationsformer, bl.a. regneforskrift, graf og tabel.
- kunne tegne en graf ud fra en regneforskrift eller en tabel.
- kunne bestemme en regneforskrift for en eksponentiel udvikling ud fra en passende tabel for funktionen.
- kunne give en verbal repræsentation af en funktion i form af en sproglig formulering af den sammenhæng eller udvikling, funktionen beskriver.

Et andet eksempel – i forbindelse med arbejdet med geometri på B- og A-niveauet – er at kende til og kunne vælge hensigtsmæssigt mellem ligning, parameterfremstilling og grafisk repræsentation af en cirkel.

På B- og A-niveau er differentialkvotient et centralt begreb. Det indgår her i repræsentationskompetencen at kunne forstå og betjene sig af repræsentationsformer som

- en tangenthældning (altså en repræsentation af geometrisk karakter).
- ændringshastighed, fx med reference til erfaringer fra forskellige dagligdags situationer som bilkørsel, penge i banken etc.
- grænseværdien for en differenskvotient.
- en funktionsværdi for den afledede funktion.

Kompetencen indebærer også at kunne vælge den repræsentationsform og dertil hørende løsningsstrategi, der er bedst egnet til en given opgave eller problemstilling. I situationer, hvori der indgår en eller flere funktioner – på C-niveauet typisk i forbindelse med en konkret anvendelse – skal eleverne således kunne afgøre, om analytisk eller grafisk løsning er mest hensigtsmæssig. På A-niveau hører det fx med at kunne tage kvalificeret stilling til, om et bestemt integral i en given situation skal bestemmes ved analytiske, grafiske eller numeriske metoder.

I kompetencen indgår også at have kendskab til de informationstab (eller informationstilvækster), der optræder ved valget af en bestemt repræsentation. Fx skal eleverne kende til den forskel i information, der ligger i, om man for en funktion kender en regneforskrift eller kun en tabel over visse funktionsværdier.

D.2.6 Symbol- og formalismekompetence

Karakteristik

På alle tre gymnasiale niveauer består denne kompetence dels i at kunne *afkode* symbol- og formelsprog, i at kunne *oversætte* frem og tilbage mellem symbolholdigt matematisk sprog og naturligt sprog, og i at kunne *behandle og betjene sig af* symbolholdige udsagn og udtryk, herunder formler. Dels i at *have kendskab til* karakteren af og "spillereglerne" for formelle matematiske systemer (typisk aksiomatiske teorier).

På A-niveauet udvides dækninsgraden ved, at eleverne ikke blot forventes at have kendskab til, men også *indsigt i* karakteren af og "spillereglerne" for formelle matematiske systemer.

Kommentar

I forhold til grundskolens afsluttende trin er dækningsgraden på alle tre gymnasiale niveauer under ét udvidet i kraft af pointeringen af, at de formelle matematiske systemer, der er på dagsordenen, typisk er aksiomatiske teorier. Desuden skal eleverne gøre sig mere end eksemplariske erfaringer med forbindelsen mellem ræsonnementer generelt og beviser som specialtilfælde.

Den samlede karakteristik af dækningsgraden på A-niveau er identisk med grundkarakteristikken i kapitel 4.

Eksemplificering

Det at *kunne oversætte frem og tilbage mellem symbolholdigt matematisk sprog og naturligt sprog* kan komme til udtryk, når opgaver skal forstås, hvad enten det drejer sig om en præstruktureret tekstopgave ("grøftegraveropgave"), der skal omsættes til et matematisk symbolholdigt udtryk, eller et matematisk resultat, der skal beskrives i ord. Det kan fx dreje sig om at

Alle: forstå, at den Pythagoræiske læresætning $a^2 + b^2 = c^2$ i mere dagligdags termer udtrykker, at "i en retvinklet trekant er summen af kateternes kvadrater er lig med hypotenusens kvadrat", og at kunne benytte den Pythagoræiske læresætning, uanset om trekantens sider hedder a, b og c eller ej.

Alle: bestemme forskriften for prisen som funktion af den kørte distance, når det oplyses, at et taxaselskab har et startgebyr på 12 kr. og en kilometertakst på 3 kr.

B&A: kunne afgøre, at mængden $\left\{(x,y)\;\middle|\; y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right\}$ beskriver alle punkter på parablen med ligningen $y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, og omvendt at kunne opskrive ligningen for parablen med opadvendte grene, som har toppunkt i $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ og 1 som koefficient til andengradsleddet.

B&A: kunne udlede, at den af funktionerne $f_b(x) = \sin(x+b)$, hvor $b \in [0;2\pi]$, som i punktet 0 har værdien 1, må opfylde at $f_b(0) = \sin(b) = 1$, hvorfor $b = {}^{\pi}\!/_{2}$.

A: kunne oversætte differentialligningen $y' = a \cdot y$ til, at væksthastigheden er proportional med y – også i en iklædning, hvor y fx angiver størrelsen af en population.

Som eksempler på oversættelsesopgaver af "grøftegraverkarakter" kan vi nævne:

- "En kasse uden låg skal være $1,6$ gange så lang, som den er bred, og have et bestemt rumfang. Hvordan skal kassen udformes, for at overfladearealet bliver mindst muligt?"
- "Fra man får sin løn, til man står med en vare i hånden, betaler man først indkomstskat og siden moms. Hvordan afhænger den samlede skat, man betaler, af indkomstskatte-procenten og moms-procenten?"

Det at *kunne behandle og betjene sig af symbolholdige udsagn og udtryk, herunder formler*, kommer i spil i arbejdet med formler, der kan benyttes i flere sammenhænge ved at isolere en given størrelse. Fx skal eleverne kunne se, at $sin(A) = \frac{a}{c}$ indeholder tre formler, og kunne udnytte styrken ved dette -– herunder kunne benytte formlen, uanset hvordan trekantens sider og vinkler er navngivet. Det anses således ikke på C-niveauet for tilstrækkeligt blot at kunne arbejde instrumentelt med formler.

Et *kendskab til karakteren af og "spillereglerne" for formelle matematiske systemer* kan man fx arbejde med gennem

Alle: et forløb i det aksiomatiske grundlag for den euklidiske geometri.

A: en aksiomatisk opbygning af vektorregningen.

D.2.7 Kommunikationskompetence

Karakteristik

På alle tre gymnasiale niveauer består denne kompetence dels i at kunne *sætte sig ind i og fortolke* andres matematikholdige skriftlige, mundtlige eller visuelle udsagn og "tekster", dels i at kunne *udtrykke sig* på forskellige måder og på forskellige niveauer af teoretisk eller teknisk præcision om matematikholdige anliggender, skriftligt, mundtligt eller visuelt over for forskellige kategorier af modtagere.

Kommentar

Ligesom det var tilfældet på grundskolens afsluttende trin, er dækningsgraden her ikke afgrænset i forhold til grundkarakteristikken i kapitel 4. Arbejdet med at udvikle elevernes besiddelse af kompetencen bør derfor fokusere på andre ting, jf. kommentarerne i afsnit D.1.1 (side 243).

Eksemplificering

Indenfor undervisningens rammer handler det at kunne *sætte sig ind i og fortolke* andres matematikholdige skriftlige, mundtlige eller visuelle udsagn og "tekster" om at kunne læse sædvanlig lærebogstekst samt andre tekster hvori der indgår matematik (bøger i matematikanvendende fag, avisartikler m.m.), at kunne forstå en mundtlig forklaring fra en lærer og på konstruktiv vis kunne "sende bolden tilbage", at kunne kommunikere meningsfuldt med klassekammerater i et gruppearbejde i en matematiktime osv.

En tænkt dialog mellem en lærer og en elev:

L: Ved et møntkast er der to udfald: Plat og krone. Ser vi på en symmetrisk mønt, er $P(\text{plat}) = P(\text{krone}) = 1/2$. Vi kaster denne mønt. Hvad kan der ske?

E: Vi kan få plat eller krone.

L: Kan mønten ikke stå på højkant?

E: Jo, det kan den vel.

L: Men hvad er sandsynligheden for at den står på højkant?

E: Da $P(\text{plat}) = P(\text{krone}) = 1/2$, og den samlede sandsynlighed for alle hændelser skal være 1, så må det ske med sandsynlighed 0.

L: Vil det sige, at det ikke kan ske alligevel?

E: Jo, men sandsynligheden vil være forsvindende lille.

L: Men alligevel: Den samlede sandsynlighed for alle hændelser bliver da større end 1, og det kan den ikke.

E: I virkeligheden kan mønten godt stå på højkant, men ikke i den model, vi benytter til at beskrive virkeligheden.

Et oplæg til skriftlig kommunikation på flere niveauer findes i dette eksempel:

- Anskaf det nyeste tilbudsmateriale om Den Store Danske Encyklopædi. Nedenfor er anført forskellige priser og betalingsmåder:

  A. Udgaven i blåt helbind: 70 mdl. rater á $228{,}57$kr. $= 16\,000$kr.
  B. Udgaven i særindbinding: 70 mdl. rater á $285{,}71$kr. $= 20\,000$kr.
  C. Kontant betaling: Dette giver ret til særindbinding.

  Forestil dig, at du arbejder ved Danmarks Nationalleksikon. Du har fået til opgave at udarbejde en skrivelse til alle boghandlere her i landet.

  Skrivelsen skal sætte boghandleren og ekspedienterne i stand til at give en mulig køber af Encyklopædien en fyldestgørende økonomisk vejledning og skal indeholde

  1. en regnearksudskrift af relevante beregninger – den skal være forståelig for boghandleren.
  2. en tekst, der indeholder konklusionerne fra regnearket – den skal være forståelig for ekspedienten, som jo skal rådgive kunden.

  Skrivelsen skal desuden indeholde svar på følgende spørgsmål:

  1. Hvad er nutidsværdien af de 16 000 kr. i betalingsmåden A og de 20 000 kr. i B?
  2. Hvor stort et engangsbeløb er det nødvendigt at sætte i banken for, at dette beløb netop kan betale de 70 mdl. rater?
  3. Hvad kan bedst betale sig ved køb af udgaven i særindbinding:
     (a) At låne 16 000 kr. i banken til kontant betaling?
     (b) At betale 20 000 kr. over 70 månedlige rater?
     (c) At betale 16 000 kr. kontant eller sætte pengene i banken og betale 16 000 kr. over 70 rater?

D.2.8 Hjælpemiddelkompetence

Karakteristik

På alle tre gymnasiale niveauer består denne kompetence dels i at *have kendskab til* eksistensen og egenskaberne ved diverse former for relevante redskaber til brug for matematisk virksomhed og have indblik i deres *muligheder og begrænsninger* i forskellige slags situationer, dels i at være i stand til på reflekteret vis at *betjene sig af* sådanne hjælpemidler.

Kommentar

Ligesom det var tilfældet på grundskolens afsluttende trin, er dækningsgraden her ikke afgrænset i forhold til grundkarakteristikken i kapitel 4. Arbejdet med at udvikle elevernes besiddelse af kompetencen bør derfor fokusere på andre ting, jf. kommentarerne i afsnit D.1.1 (side 243).

De basale hjælpemidler på det gymnasiale niveau er lommeregnere, grafregnere, tekniske papirer og tabeller. Herudover kan regneark, grafiske tegneprogrammer, CAS-værktøjer og anden computersoftware komme på tale.

Hjælpemiddelkompetencen går ofte hånd i hånd med andre kompetencer, fx problembehandlingskompetencen, ikke blot som en kontrol af, at man har regnet rigtigt, men som en hjælp, hvis problembehandlingskompetencen skulle svigte.

Desuden kræver brugen af hjælpemidler, at man kan repræsentere problemet og de indgående matematiske objekter på en måde, der giver mening i relation til det aktuelle hjælpemiddel.

Eksemplificering

De nedenstående eksempler belyser de forskellige sider af hjælpemiddelkompetencen: Kendskab til eksistens og egenskaber, indsigt i muligheder og begrænsninger samt en reflekteret betjening af hjælpemidlet.

- To sammenhørende data sæt skal undersøges for lineær sammenhæng. På C-niveauet vil en typisk tilgang være at plotte datapunkterne på et millimeterpapir og med en lineal forsøge at indlægge bedste rette linje gennem datapunkterne, hvorefter "regressionslinjens" ligning bestemmes ved aflæsning (fx af to punkter).

  På B-niveauet vil data typisk blive tastet ind i en grafregner, der så vil give regressionslinjens ligning og en korrelationskoefficient. Dette vil dog ikke anses for at være en tilstrækkelig modelkontrol, hvorfor datapunkterne må plottes i millimeterpapir – eller der må foretages en kontrol af residualerne.

- Elever på B-og A-niveau må forventes at være fortrolig med forskellen på en funktions graf og det billede af grafen, der vises på en grafregner – herunder forstå, hvorfor grafen for funktionen $\sin(ax)$ for visse værdier af a og i visse vinduer fremstår som en ret linje på grafregnerens display.

- Hvad er summen af tallene fra 1 til 100? Den velkendte metode er:

  $$1+2+\ldots+99+100=(1+100)+(2+99)+\ldots=50\cdot 101=5050$$

  Prøver man på en lommeregner, får man med sikkerhed et svar, men ingen forståelse af, hvorfor svaret måske er korrekt.

  Ofte sker en kontrol af en lommeregnerberegning ved at gentage beregningen, indtil man får et resultat, man har haft tidligere. Den reflekterede betjening må da give anledning til, at enten er beregningen korrekt, eller også er den samme fejl lavet to gange.

- I forbindelse med ligningsløsning er der flere redskaber at vælge blandt: Millimeterpapir, tekniske papirer, tabeller, grafregnere og CAS-værktøjer. Et reflekteret valg af redskab forudsætter kendskab til hver type hjælpemiddels muligheder og begrænsninger.

  Ligningen $x^2=\sqrt{x^2+6}$ fører ved almindelig beregning til en fjerdegradsligning, men denne kan ved substitution omformes til en andengradsligning og løses med standardmetoder. Grafisk løsning af denne ligning kræver indførelse af to funktioner, $f(x)=x^2$ og $g(x)=\sqrt{x^2+6}$, hvis grafer tegnes i samme koordinatsystem. Løsningerne findes som x-koordinaten til skæringspunkterne mellem de to grafer.

  For visse ligningers vedkommende lettes arbejdet betydeligt af en grafregner – måske endda med en indbygget numerisk ligningsløser. Dog må der alligevel ofte kombineres med en grafisk illustration, bl.a. til bestemmelse af startværdier for de numeriske algoritmer.

  For at løse ligningen $x^2=\sqrt{x^2+6}$ på en grafregner, indtastes funktioner svarende til $f(x)=x^2$ og $g(x)=\sqrt{x^2+6}$, og graferne tegnes. Herefter benyttes grafregnerens værktøj til bestemmelse af skæringspunkter mellem to grafer. Der er dog intet til hinder for at indtegne grafen for $(f-g)(x)$ og benytte grafregnerens værktøj til nulpunktsbestemmelse. Sidstnævnte metode vil almindeligvis ikke være hensigtsmæssig, hvis der benyttes millimeterpapir til graftegningen.

  Er grafregneren udstyret med en ligningsløser, indtastes ligningen på den krævede form (fx $f(x)=g(x)$ eller $0=f(x)-g(x)$, og der gives en startværdi (fx fundet ved en grafisk illustration), hvorefter ligningsløseren startes. Der må forventes et vist kendskab til den algoritme, grafregneren benytter, så eleverne kan forklare, hvad der går galt, hvis ingen eller en forkert løsning bestemmes af algoritmen.

  Ikke alle ligninger egner sig til løsning med grafregnere. Fx hvis normalfordelingsfunktionen indgår i ligningen, vil et normalfordelingspapir være det oplagte valg, og hvis binomialfordelingen indgår, vil en tabel være det oplagte valg. I sidstnævnte tilfælde kan man dog lade grafregneren generere tabellen.

Selv med CAS-værktøjernes symbolske ligningsløsere til rådighed kan man ikke undgå den grafiske tilgang. En ligning som fx $x^2 = 2^x$ vil give problemer for de fleste CAS-værktøjer, og selvom et symbolsk resultat skulle opnås, vil det være uforståeligt på det gymnasiale niveau.

D.3 Overblik og dømmekraft vedrørende matematik som fagområde i det almene gymnasium

Som tidligere nævnt er det en central bestræbelse for dette projekt at bidrage til at mindske problemer med utilstrækkelig sammenhæng mellem de forskellige niveauer og trin i matematikundervisningen. I den forbindelse er det – ikke mindst i forhold til uddannelser, som skal indgå i symbiose med andre uddannelser – afgørende at undgå, at undervisningens "toning" skifter så markant fra et niveau til et andet, at man ikke kan genkende det som malet med den samme "palet". En sådan situation fremprovokeres let, hvis der undervejs i en udvikling pludselig bringes helt nye "grundfarver" i spil. Så er det bedre fra starten at have alle "grundfarverne" med på "paletten" og være bevidst om, at nogle af farverne til en start mest er med netop for fuldkommenhedens skyld og derfor skal bruges med varsomhed.

Når vi vælger at fastholde de forskellige former for overblik og dømmekraft i karakteristikken af alle de tre gymnasiale matematikniveauer, er det således primært for at fastholde læreren og andre medtilrettelæggeres opmærksomhed på, at det på alle niveauer og trin gør en forskel, om de perspektiver på matematik, som der her er tale om, gøres til genstand for udtrykkelig behandling, refleksion og artikulation, *når lejligheden byder sig*. Sådanne metafaglige diskussioner er velegnede som træning i at kunne "hæve sig op over" de mange konkrete erfaringer, man gør sig undervejs i undervisningen, og en sådan generel evne til at kunne operere på flere vidensniveauer er en forudsætning for ad åre at udvikle bevidst og artikuleret overblik og dømmekraft som dem vi her beskæftiger os med, jf. kommentarerne i afsnit 4.5 (side 66).

Omvendt vil det være omsonst at gennemføre metafaglige diskussioner som dem, der opfordres til ovenfor, hvis ikke eleverne kan føre sådanne diskussioner tilbage til en lang række konkrete erfaringer, som de har erhvervet i arbejdet med at udvikle de otte kompetencer.

Der ligger derfor en spændende udfordring i løbende at vurdere, hvornår der skal arbejdes konkret med sigte på udvikling af kompetencerne, og hvornår der skal initiativ til metafaglige diskussioner med sigte på udviklingen af de forskellige former for overblik og dømmekraft.

Den tætte kobling mellem kompetenceudvikling og udvikling af overblik og dømmekraft er baggrunden for, at vi nedenfor nøjes med at nævne ganske få eksempler og i stedet her lægger op til at generere utallige andre ved for hver gruppe af kompetenceeksempler at stille sig selv spørgsmålet: "Er nogle af disse eksempler –

eller omformuleringer heraf – velegnede som erfaringsgrundlag for at kunne diskutere nogle af spørgsmålene i afsnit 4.5 eller forlængelser heraf, og er her og nu et passende tidspunkt for en sådan diskussion?"

D.3.1 Matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder

Karakteristik

På alle tre gymnasiale niveauer er genstanden for denne form for overblik og dømmekraft den faktiske anvendelse af matematik til udenomsmatematiske formål inden for områder af dagligdags, samfundsmæssig eller videnskabelig betydning. Denne anvendelse kommer i stand og til udtryk gennem bygningen og udnyttelsen af matematiske modeller.

På de gymnasiale niveauer består en vigtig del af udfordringen her i at sikre, at eleverne får et kendskab til centrale, faktiske anvendelser af matematik i nogle af de fag, der hører til den pågældende ungdomsuddannelse, samt kendskab til udvalgte, autentiske matematikanvendelser af samfundsmæssig betydning.

Eleverne skal herigennem udvikle en viden om og en forståelse af, at matematik har mange væsentlige anvendelser, og de skal kende nogle karakteristiske eksempler på, hvordan matematik rent faktisk anvendes, og hvilken betydning det har.

Kommentar

Karakteristikken her svarer til de mere overgribende dele (modelleringskompetence er også til dels omfattet i bekendtgørelsesteksten) af intentionerne bag indførelsen af "Modelaspektet", der er beskrevet i den pt. gældende bekendtgørelse for gymnasiet.

Eksemplificering

Eleverne kan eksempelvis få kendskab til anvendelse af

- matematiske vækstmodeller til beskrivelse af populationers vækst i biologi.
- logaritmer i forbindelse med syrer og baser i kemi.
- differential- og integralregning i arbejdet med kinematik og dynamik i fysik.

Matematikanvendelse af samfundsmæssig betydning kan eleverne fx møde ved

- analyse af avisartikler, hvori der optræder anvendelse af matematik.
- beskæftigelse med politiske værktøjer som de nationaløkonomiske modeller ADAM og SMEC.

D.3.2 Matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning

Karakteristik

På alle tre gymnasiale niveauer er genstanden for denne form for overblik og dømmekraft det forhold, at matematikken har udviklet sig i tid og rum, i kultur og samfund.

I den almentgymnasiale matematikundervisning skal eleverne erhverve et kendskab til den historiske udvikling inden for udvalgte dele af den matematik, der i øvrigt arbejdes med på det pågældende niveau. De centrale drivkræfter i den historiske udvikling skal diskuteres, herunder påvirkningen fra forskellige anvendelsesområder.

Eleverne skal herigennem udvikle en viden om og en forståelse af, at matematikken er menneskeskabt og rent faktisk har gennemgået en historisk udvikling – og ikke blot er noget, der altid har været der eller pludselig er opstået ud af den blå luft.

Kommentar

Karakteristikken her svarer til intentionerne bag indførelsen af "Det historiske aspekt", der er beskrevet i den pt. gældende bekendtgørelse for gymnasiet.

Eksemplificering

Arbejdet med matematikkens historiske udvikling kan inddrages som perspektivering af et hovedemne eller i særskilte undervisningsforløb. I forbindelse med emnet Tal kan man fx inddrage talbegreb og talanvendelse i det gamle Egypten, Babylon eller Grækenland.

Ligeledes kan man – på B- og A-niveau som pensum p.t. er fastlagt – eksempelvis beskæftige sige med logaritmernes historie og med analysens tidlige historie, evt. med anvendelse af historisk kildemateriale.

Af andre mere moderne emner til belysning af matematikkens historiske udvikling kan nævnes:

- "Fraktaler — hvorfor blev de pludselig så interessante?"
- "Fermats sidste sætning — hvorfor blev den først bevist for nylig?"
- "Primtallene — hvordan ren matematik pludselig bliver til anvendt matematik, og hvorfor det er fornuftigt at investere i grundforskning."

D.3.3 Matematikkens karakter som fagområde

Karakteristik

Som fagområde har matematikken sine egne karakteristika. Det er disse karakteristika, der *på alle tre gymnasiale niveauer* er genstand for den foreliggende type overblik og dømmekraft. Nogle karakteristika har matematikken tilfælles med andre fagområder, andre er den ret alene om.

Eleverne skal erhverve en forståelse af, hvilke problemstillinger og metoder, der er karakteristiske for faget matematik. Specielt på A-niveauet lægges der vægt på, at eleverne opnår en forståelse af matematikfagets særlige karakter og struktur, herunder aksiomatisk-deduktive teoriopbygninger.

Kommentar

På alle tre niveauer skal eleverne opnå et kendskab til og en forståelse af, hvordan matematiske teorier er opbygget, specielt om bevisers rolle og betydning. Arbejdet med denne form for overblik og dømmekraft vil derfor blandt de otte kompetencer ikke mindst ligge tæt op ad arbejdet med at udvikle symbol- og formalismekompetence. Desuden skaber vægten på forståelse af karakteristiske problemstillinger og metoder et naturligt slægtsskab med udviklingen af tankegangskompetence.

Karakteristikken her svarer således til de mere overgribende dele af intentionerne bag indførelsen af aspektet "Matematikkens indre struktur", der er beskrevet i den pt. gældende bekendtgørelse for gymnasiet.

Eksemplificering

Et selvstændigt forløb kan fx dreje sig om

- det induktive vs. det deduktive princip.
- forskellige typer af beviser.
- grundlaget for en eller flere matematiske teoribygninger.

Eventuelt kan den historiske udvikling af et emne inddrages, fx udviklingen af grundlaget for differential- og integralregningen.

E Gastronomuddannelsen som eksempel på en erhvervsuddannelse uden formaliseret matematikundervisning

E.1 Generelle kommentarer

Gastronomuddannelsen[1] er en overordnet betegnelse, som dækker over specialerne kok, cater og smørrebrødsjomfru, som følges på grundforløbet og den efterfølgende første skoleperiode. Herefter deles eleverne efter deres speciale. Kokkeuddannelsen er den længstvarende med en uddannelsestid på fire år. I uddannelsen er der ingen obligatorisk matematikundervisning, men der er levn fra tidligere tiders "levnedsmiddelregning". Under EFG-systemet frem til 1991 var regning og kalkulation et obligatorisk fag for alle levnedsmiddeluddannelserne. Det indeholdt almindelig talbehandling, procentregning, omregning af opskrifter, svind, koncentration, næringsdeklarationer, penge og økonomi samt forskellige former for kalkulationer.

En dygtig gastronom er selvfølgelig i besiddelser af nogle matematiske kompetencer, der gør ham i stand til købe ind, producere og sælge mest fordelagtigt og i størst mulig overensstemmelse med målgruppen. I branchen er det en vigtig kompetence at kunne beregne de rette mængder, også når der skal laves mad til store selskaber, samt kunne lave menuer, hvor der tages hensyn til sæsonvarer. Ligeledes er det vigtigt, at gastronomen kan kalkulere den rette kostpris, så varen får den nødvendige salgspris. Herudover er det væsentligt at kunne tolke næringsdeklarationer og have et vist kendskab til kostberegning. Hvis kokken vil være køkkenchef, er matematiske kompetencer, der understøtter kendskab og forståelse for økonomiske sammenhænge og modeller, endnu væsentligere.

De matematiske kompetencer kommer hos gastronomen til udtryk i hans/hendes evne til at handle rigtigt, når de praktiske opgaver skal løses. Kan han/hun ikke omregne opskrifter til et hvilket som helst antal, ja så bliver der produceret alt for meget eller for lidt. Kan han/hun ikke beregne den øgede tid, der skal beregnes ved

[1] Ud over arbejdsgruppen har Marianne Nissen på afgørende måde bidraget til skabelsen af dette kapitel.

store portioner, bliver maden ikke færdig til tiden, eller den skal holdes varm for længe. Kalkulerer han/hun en forkert pris, er der ingen fortjeneste, eller han/hun kan ikke sælge sin vare. Har han/hun beregnet et forkert forhold mellem ingredienserne, går det ud over smagen.

I uddannelsen undervises der ikke eksplicit i matematik, men matematikken inddrages, når problemerne opstår, og man mangler de umiddelbare redskaber, der skal til for at løse dem. Der gås ikke i dybden med de matematiske aspekter af problemstillingen, men anvises i stedet en metode, som branchen bruger til at løse problemet.

På gastronomuddannelsen består *tankegangskompetence* i at være klar over, at der skal anvendes matematik for at løse problemet. I sin mest simple form kan den komme til udtryk ved, at der gribes efter lommeregneren.

Problembehandlingskompetence består i at kunne formulere, afgrænse og præcisere anvendte matematiske problemer, der hører hjemme i branchen, men også at kunne løse dem i færdigformuleret form. Det gælder både egne og andres.

Modelleringskompetence består for gastronomen i at anvende de simple matematiske modeller, der findes inden for branchen. Desuden er det vigtigt at kende modellernes begrænsninger, kende forudsætningerne samt kunne vurdere validiteten af de resultater, som brugen af modellerne giver.

Ræsonnementskompetence kommer kun til udtryk i uddannelsen i form af logiske ræsonnementer, der skal fremme forståelsen for sammenhænge, der er af betydning for at handle hensigtsmæssigt.

I uddannelsen kommer *repræsentationskompetence* især til udfoldelse i forhold til almindelig talbehandling og de fire regningsarter, og i omgangen med tabeller, diagrammer og grafer. Kommer den til udtryk, er det mest som en overfladisk forståelse af repræsentationen.

I forbindelse med almindelig talbehandling kommer *symbol- og formalismekompetence* til udtryk, når der sættes rigtigt ind i formlerne, og den efterfølgende udregning udføres korrekt. Desuden udtrykkes denne kompetence i evnen til at kunne forstå resultatet.

Hos gastronomen kommer *kommunikationskompetence* til udtryk mellem fagfæller, når de brancheorienterede beregningsmåder diskuteres. Det er ikke en kommunikation om eller med matematik, snarere en kommunikation, hvor matematiske elementer indgår som følge af, at de ligger implicit i det, der kommunikeres om.

For gastronomen er *hjælpemiddelkompetence* et kendskab til lommeregneren, regneark og kalkulationsark. Kompetencen afspejler sig ved, at de bruges og bruges rigtigt, ikke ved et avanceret kendskab til, hvad disse hjælpemidler har af muligheder i en bredere sammenhæng.

E.2 Matematiske kompetencer i gastronomuddannelsen

E.2.1 Tankegangskompetence

Karakteristik

På gastronomuddannelsen består denne kompetence i at være klar over, at der skal anvendes matematik for at løse et givet problem. I sin mest simple form kan den komme til udtryk ved, at der gribes efter lommeregneren.

Kommentar

På gastronomuddannelsen udøves tankegangskompetence mest på helt elementært niveau, og der er ikke tale om, at eleverne skal kunne den matematiske terminologi, eller om at de arbejder med "rene" områder. Det er anvendelsesorienteret, og det er erfaringen, der danner baggrund for en udvidelse af den kompetence, eleverne kommer med.

Der er på ingen måde tale om at kunne forstå matematiske begrebers rækkevidde og begrænsning, ej heller at kunne skelne, hverken passivt eller aktivt, mellem forskellige slags matematiske udsagn eller påstande.

Eksemplificering

Til illustration af tankegangskompetence inden for området kan følgende nævnes:

L: "Du har en opskrift beregnet til 4 personer, men du skal lave retten til 10 personer."

E: "Der skal laves mad til flere – hvor mange gange skal man så tage 4 portioner for at have til 10 personer? Det kan *regnes ud* ved hjælp af en division. Svaret må blive en faktor."

L: "Du skal bruge 400 gram rensede champignoner til din ret. Hvor meget skal du så starte med, når svindprocenten for champignon er 20?"

E: "Der skal bruges *procentregning*".

E.2.2 Problembehandlingskompetence

Karakteristik

På gastronomuddannelsen består denne kompetence dels i at kunne formulere, afgrænse og præcisere "anvendte" matematiske problemer, der hører hjemme i branchen, "åbne" såvel som "lukkede", dels i at kunne løse sådanne problemer i færdigformuleret form, egne såvel som andres.

Kommentar

De anvendte matematiske opgaver, som er indeholdt i gastronomuddannelsen, kan ofte løses ved hjælp af rutineprægede færdigheder, idet der er givne metoder til at løse disse opgaver. For eksempel løses kalkulationsproblemer som de ovennævnte vha. et kalkulationsark, som omhyggeligt er udviklet med henblik på at gøre de mange kalkulationer så uproblematiske som muligt for gastronomen. Som oftest skal gastronomeleverne imidlertid udvikle sig, før de opnår et sådant forhold til de forskellige kalkulationer, og for at en sådan udvikling finder sted, kræves et vist mål af problembehandlingskompetence.

Man kan således sige, at det er en del af gastronomuddannelsen at mindske elevernes behov for en veludviklet matematisk problembehandlingskompetence, hvilket bla. sker gennem udvikling af deres modellerings- og hjælpemiddelkompetence, jf. nedenfor.

Eksemplificering

Kostberegning er en væsentlig del af alle levnedsmiddeluddannelser. At finde energiindholdet pr. 100 g af en ret og lave en energifordeling på samme ret er en tilbagevendende udfordring. Da eleverne præsenteres for metoder til at håndtere denne udfordring, er det et eksempel på noget, som eleverne gerne i løbet af uddannelsen skulle holde op med at opleve problematisk.

En mere regulært problemfyldt vinkel fås, hvis der skal laves en ret med et bestemt energiindhold og en bestemt energifordeling. Her kan der angives flere løsningsmuligheder, og det overlades til eleverne at vælge den bedste strategi.

Et meget åbent anvendelsesorienteret problem for gastronomen kunne være:

- “ Du skal lave maden til et svendegilde – du har 2000 kr. at bruge af – der kommer 40 gæster. Find og omregn opskrifter, lav en varebestilling og kalkuler en kostpris”.

E.2.3 Modelleringskompetence

Karakteristik

På gastronomuddannelsen består denne kompetence dels i at anvende de simple matematiske modeller, der findes inden for branchen, dels i at kende disse modellers forudsætninger og begrænsninger, for på den baggrund at kunne vurdere validiteten af modelresultaterne.

Kommentar

Modelleringskompetence hos gastronomen udtrykkes ikke som evnen til at vurdere brugen af matematik i modellerne, men som en evne til at anvende modellerne til at løse et praktisk problem. Modellerne er i hovedsagen foreskrivende, snarere end beskrivende. Modelanvendelsen omfatter validering af den færdige model i forhold til de praktiske erfaringer, man har fra området. Derimod fordres det ikke at gastronomen kan styre de mere overblikskrævende afsluttende dele af modelleringsprocessen, som i grundkarakteristikken på side 52 er beskrevet med tre komponenter: Kritisk analyse af modellen, kommunikation med andre om selve modellen samt overblik over og styring af den samlede modelleringsproces.

Eksemplificering

I forbindelse med den førnævnte "mad til mange-problematik" er det vigtigt, at en gastronom kan beregne mængden ret nøje, idet hele køkkenets rentabilitet er afhængig heraf. Til at håndtere problematikken er der lavet en model, hvor man bruger en faktor, der fremkommer som et produkt af den almindelige omregningsfaktor for en opskrift og et forholdstal baseret på kødmængden i opskriften og en tabelværdi for kødtypen. Der findes tabeller over, hvor mange gram af forskellige slags kød der skal bruges pr. person til bestemte retter. Det er oftest angivet som et interval, og det er så op til kokken at skønne, hvor i intervallet man skal lægge sig i forhold til de gæster, der skal serveres for. Denne kødmængde pr. person bliver så udslagsgivende for den faktor, man kommer frem til. Lad os illustrere med et mere konkret eksempel:

- I en opskrift på Bøf Stroganoff til fire personer er kødmængden angivet til 600 g okseinderlår. Der skal fremstilles 40 portioner af retten. Ifølge en tabel beregner man 75–150 g pr. person i en sammenkogt ret. Da det er en del af en to-retters menu, og der er tale om voksne i 40–50 års alderen uden hårdt fysisk arbejde, vælges en mængde på 100 g pr. person. Det giver følgende omregningsfaktor, når der skal laves Bøf Stroganoff til 40 personer:

  Den almindelige omregningsfaktor er $^{40}/_{4}$, men ved store mængder indgår vurdering på kødmængde. Med udgangspunktet 100 g ville det betyde, at i opskriften til 4 personer ville kødmængden udgøre 400 g i stedet for 600 g. De øvrige ingredienser skal ændres med samme faktor; $^{400}/_{600}$. Denne brøkdel indregnes, hvorved omregningsfaktoren til 40 personer bliver $^{40}/_{4} \cdot {}^{400}/_{600} = 6,7$. Inddragelsen af kødmængdefaktoren i modellen gør altså, at omregningsfaktoren reduceres fra 10 til $6,7$.

  I praksis er det ikke muligt nøjagtigt at beregne den mængde, der spises ved så store antal. Omregningsfaktoren afrundes derfor til nærmeste hele tal, i eksemplet her 7. Hvis retten er en del af en endnu større menu, fratrækkes yderligere 20%.

Ingredienser som krydderier og salt bør ikke tilsættes ukritisk på en gang, da de omregnede mængder i nogle tilfælde kan være for store. Retten krydres derfor ved tilsmagning lidt efter lidt, hvilket er et eksempel på, at modelleringskompetence på gastronomuddannelsen også omfatter forståelse for modellens begrænsning og dens validitet.

E.2.4 Ræsonnementskompetence

Karakteristik

På gastronomuddannelsen kommer denne kompetence kun til udtryk i form af logiske ræsonnementer, der skal fremme forståelsen for sammenhænge, der er af betydning for at handle hensigtsmæssigt.

Kommentar

På gastronomuddannelsen vil ræsonnementerne være konkrete eller intuitive. Der er ikke tale om formel bevisførelse af nogen art. Der kan være tale om at efterprøve nogle påstande/argumenter og efterfølgende drage sammenligninger.

Eksemplificering

Der kan være tale om simple ræsonnementer af typen:

- Hvis en opskrift til 4 personer giver en rest, giver opskriften omregnet til 100 personer 25 gange så meget til rest. Altså må vi anvende en alternativ model for at lave “mad til mange”.
- At købe friske råvarer uden for sæson, hvor de er dyrere, giver en højere kostpris, som medfører en højere salgspris eller en mindre fortjeneste. Altså er en menu afpasset efter årstiderne mest rentabel.
- Et mindre svind under rensning, tilberedning og opbevaring giver en mindre kostpris, som giver en lavere salgspris eller en større fortjeneste. Altså er det i egen interesse at arbejde på at nedbringe de forskellige former for svind.

Matematikken kan måske være lidt svær at få øje på, fordi den her har en kvalitativ form, men det er matematikken, eller rettere de matematiske beregninger, man i konkrete situationer kan lave for at anskueliggøre disse sammenhænge, der vil bære argumentationen.

E.2.5 Repræsentationskompetence

Karakteristik

På gastronomuddannelsen kommer denne kompetence primært til udfoldelse i forbindelse med almindelig talbehandling og de fire regningsarter samt i omgangen med tabeller, diagrammer og grafer. Hvis kompetencen kommer til udtryk herudover, er det mest som en overfladisk forståelse af repræsentationen.

Kommentar

Gastronomen betjener sig i høj grad af tabeller af forskellig slags. De tjener til at gøre de daglige beregninger og kalkulationer nemmere. For gastronomen repræsenterer disse tabeller jo størrelser, han/hun kender fra det daglige arbejde, og som han/hun er nødt til at tage højde for – fx svind.

Eksemplificering

I forbindelser med mængdeangivelser er der udarbejdet diverse tabeller over portionering, ligesom der findes tabeller over rensesvind, tilberedningssvind og røgsvind for de forskellige typer råvarer. Herudover er der tabeller, der omregner en svindprocent til en omregningsfaktor, hvis man skulle have glemt hvordan. Udøvelsen af repræsentationskompetence ligger i, at gastronomen er i stand til at anvende omregningsfaktoren (som jo repræsenterer svindet), når han/hun laver sine kalkulationer og det praktiske arbejde. Lad os se på et konkret eksempel:

- "Beregn indkøbsmængden af hel torsk, når den serveringsklare portion skal være på 125 g. Der regnes med
  - udskæringssvind på 10%.
  - kogesvind på 15%.
  - bensvind på 30%.

  Disse tre svindprocenter omsættes i tabellen til omregningsfaktorer på henholdsvis $1{,}11$, $1{,}18$ og $1{,}43$, hvilket er en hensigtsmæssig repræsentation, når indkøbet pr. portion skal beregnes. I dette tilfælde fås $125\ \text{g} \cdot 1{,}11 \cdot 1{,}18 \cdot 1{,}43 = 234$ g.

Et andet eksempel på udfoldelse af repræsentationskompetence er, når gastronomen kan forstå, at energifordelingen i procent for en given ret kan repræsenteres ved et lagkagediagram, og han/hun ud fra diagrammet kan drage de rette konklusioner om retten.

E.2.6 Symbol- og formalismekompetence

Karakteristik

På gastronomuddannelsen består denne kompetence i almindelig talbehandling, samt i at kunne håndtere de formler, der bruges i uddannelsen, hvilket her indbefatter det at sætte rigtigt ind i formlerne, udføre en korrekt udregning med de indsatte tal og kunne forstå resultatet.

Kommentar

Symbol- og formalismekompetence kommer kun til udtryk i begrænset omfang, nemlig i forbindelse med "afkodning" af simple formler. Formlerne bruges som de er – værdier indsættes og en beregning gennemføres. Manipulation med og indsigt i karakteren af formlerne kommer ikke til udtryk. I brugen af formler vil man ofte se ordene skrevet i sin helhed og ikke som symboler for de forskellige størrelser, der arbejdes med.

En "oversættelse" kommer til udtryk, når et kalkulationsskema med en masse tal og beregninger skal forklares til menigmand, så han/hun forstår, hvorfor retten skal koste så meget.

Eksemplificering

De følgende formler er eksemplariske både mht. indhold og form:

- omregningsfaktor = vægt før svind : vægt efter svind
- omregningsfaktor = 1 : (1 − svindprocent omsat til decimaltal)
- kostpris = indkøbspris · omregningsfaktor
- kostpris = bruttosalgspris : bruttofaktor

De tre førstnævnte formler refererer til problemstillinger, som tidligere har været omtalt. Den sidstnævnte formel er et udtryk for det forhold, at man ved en given markedspris (bruttosalgspris) og en given dækningsgrad (bruttofaktor) kan beregne den maksimale kostpris.

E.2.7 Kommunikationskompetence

Karakteristik

På gastronomuddannelsen består denne kompetence i at kunne diskutere de brancheorienterede beregningsmåder med fagfæller. Det gælder, både når der er tale om skriftligt nedfældede beregninger, og når kommunikationen udelukkende foregår mundtligt.

Kommentar

Det er i det væsentlige ikke tale om en kommunikation eksplicit om eller med matematik, snarere en kommunikation, hvor matematiske elementer indgår som følge af, at de ligger implicit i det, der kommunikeres om.

Eksemplificering

For en gastronom kan et matematikholdigt skrift fx være et virksomhedsregnskab eller en kalkulation lavet i køkkenet nedfældet på et beregningsark.

Branchen benytter sig som før nævnt af begrebet "bruttofaktor" som et udtryk for, hvor mange gange større bruttosalgsprisen skal være i forhold til kostprisen. Denne faktor giver anledning til megen matematikholdig kommunikation, fx med udgangspunkt i det at faktoren er forskellig efter hvilken type forretning, man har. I en restaurant skal der tages højde for moms, betjening og evt. sociale ydelser samt den dækningsgrad, der er nødvendig for at dække de faste udgifter. I en kantine er betalingen til betjeningen en anden, og de har derfor en anden bruttofaktor. Desuden ændrer faktoren sig, når overenskomsterne giver anledning til lønstigning i branchen, eller lovgivningen ændrer på de sociale ydelser, arbejdsgiverne skal betale.

E.2.8 Hjælpemiddelkompetence

Karakteristik

På gastronomuddannelsen består denne kompetence i at kunne bruge lommeregner, regneark og kalkulationsark.

Kommentar

I forhold til de nævnte hjælpemidler er der i alt væsentligt tale om, at brugen foregår inden for kendte og med tiden velafprøvede rammer. Eleverne bliver således ikke udfordret i forhold til, hvad disse hjælpemidler i øvrigt har af muligheder.

Lommeregneren er således et værktøj, hvor ikke alle funktioner bruges. Der anvendes de fire regningsarter og procentberegninger. Kalkulationsarket er udviklet af branchen og kan nu bruges i et regneark, og at kunne anvende et sådant elektronisk kalkulationsark er et krav. Den gastronom, der herudover selv kan opbygge sit kalkulationsark i et regneark, har forstået matematikken og systematikken i dette værktøj.

Eksemplificering

Lommeregneren bruges flittigt til omregning af opskrifter, kalkulationer på papir, samt kostberegninger.

At lave et kalkulationsark i fx Excel er en god øvelse, der kræver forståelse for kalkulationsarkets opbygning og de dertil hørende formler.

F Elektrikeruddannelsen som eksempel på en erhvervsuddannelse med formaliseret matematikundervisning

F.1 Generelle kommentarer

Erhvervsuddannelserne[1] i Danmark har fra deres begyndelse haft "matematiske" kompetencer med i deres programmer, om end ikke under netop den etiket. Da hovedsigtet med den enkelte erhvervsuddannelse er, at den enkelte elev bliver sat i stand til at bestride erhvervet i praksis og til at følge med i den hastige teknologiske udvikling, der typisk sker i erhvervet, ligger der ikke et fast matematikpensum beskrevet i bekendtgørelserne for de enkelte erhvervsuddannelser. Derimod er matematikelementet i bekendtgørelsen beskrevet i fælles, generel form for alle de erhvervsuddannelser, der har valgt at have matematik med i deres undervisningsprogram. Matematikundervisningen i den enkelte erhvervsuddannelse formes så efter erhvervsfagets behov og efter den aktuelle elevgruppe i den respektive erhvervsuddannelse. Derudover skal faget også bidrage til elevens personlige udvikling og almindelige indsigt i samfundsspørgsmål.

Mange erhvervsuddannelser har valgt at inkludere matematikundervisning. Det skyldes det generelle forhold, at udførelsen af de fleste håndværk har sin baggrund i størrelser. Forståelsen af størrelser, der indgår i den konkrete genstand for arbejdet eller i en arbejdsproces, er derfor af betydning. Desuden er mindre beregninger ofte nødvendige for udførelsen af bestemte dele af en arbejdsproces. Beregningerne skal typisk besvare spørgsmål som: "Hvor meget?", "hvor langt?", "hvor stort?", "hvor længe?" og "hvilken form har genstanden?". Derudover er det vigtigt, at håndværkeren kan kommunikere sine resultater videre til andre, og at han kan forstå andres betragtninger og resultater. Større beregninger, der anvender mere komplicerede dele af matematikken, ligger før eller efter den egentlige udførelse af arbejdet – typisk i projekterings- eller kontrolfasen, hvor arbejdet planlægges og vurderes.

Elektrikernes matematikkompetencer er især bundet til selve elektrikerfaget og til den fagteoretiske side af uddannelsen. Den nærmere karakterisering af de enkelte

[1] Ud over arbejdsgruppen har Nikolaj Lomholt og Eva Høg på afgørende måde bidraget til skabelsen af dette kapitel.

komponenter i kompetencestrukturen vil da også afspejle den overvejende fokusering på matematikkens tekniske sider, og ikke så meget i analyse og præcisering af matematiske begreber og emner.

Således indgår der i tankegangskompetencen ikke forståelsen af abstraktion og generalisering af matematiske resultater. Ej heller noget konkret om forståelsen af matematiske begrebers rækkevidde. Det skal dog bemærkes, at beskæftigelsen med matematiske objekter og anvendelsen af matematiske teknikker i forskellige sammenhænge giver en vis intuitiv fornemmelse for værdien af generalisering, og nogen indsigt i matematiske begrebers rækkevidde, men det opfattes som en sidegevinst. Der skelnes heller ikke nærmere mellem definitioner, sætninger, intuitive formodninger osv. Eleverne kan imidlertid selv vælge at tage matematik på et niveau, der inddrager nogle af disse forhold.

Tilsvarende er der heller ikke noget selvstændigt fokus på det at kunne ræsonnere matematisk, selvom man i realiteten i uddannelsen bevæger sig rundt i matematiske formuleringer på flere forskellige måder og med forskelligt sigte.

Til gengæld er problembehandlingskompetencen af stor betydning i elektrikeruddannelsen. Den dyrkes i nært samspil med repræsentationskompetencen, idet der lægges vægt på, at eleverne kan aktivere og betjene sig af repræsentationerne i forbindelse med færdigformulerede matematiske problemer. Det giver på sin side indsigt både i repræsentationerne selv og i måden at skabe dem på. Også modelleringskompetencen er grundlæggende, da elektrikere ofte arbejder med større projekter, hvor de enkelte elementer ikke på designstadiet har en fysisk form, og hvor det først ved en gennemprøvning af designmodellen er muligt at se, om designet er succesfuldt.

Ligesom repræsentationskompetencen er en vigtig del af de tekniske uddannelser, er dele af symbol- og formalismekompetencen det også. Elektrikerne benytter sig af mange tekniske udtryk og udsagn, som er skrevet i symbolsprog. Det skal dog bemærkes, at de formalismer, der benyttes, ikke altid fremstår på traditionel matematisk vis.

Kommunikation i og med matematik – især vedrørende størrelser – mellem elektrikere er nødvendig, ikke mindst på grund af den strøm af elektroniske nyskabelser, der hele tiden kommer på markedet. Hjælpemiddelkompetencen må være veludviklet hos elektrikere, idet både PC'er og lommeregnere bruges flittigt. Disse sidste giver eleverne en stor rutine i korrekt brug af lommeregnertasterne, hvilket bidrager til både at give en vis indsigt i de regneregler, der benyttes, samt en vis kritisk sans over for anvendelse af lommeregneren.

Hvad angår de tre former for overblik og dømmekraft, har især de historiske og de videnskabsteoretiske aspekter af matematikken som fagområde næppe relevans i denne uddannelse. Det har overblik og dømmekraft vedrørende matematikkens faktiske anvendelse i samfundet heller ikke generelt, men visse aspekter heraf – fx i sammenhæng med brugen af statistik – er ikke uden en vis relevans for uddannelsen.

F.2 Matematiske kompetencer i elektrikeruddannelsen

F.2.1 Indledning

Vi har valgt at indlede med tre opgaver fra elektrikeruddannelsen, som vi synes er eksemplariske for elektrikerfaget, samt rimeligt simple. De tjener som eksempler undervejs i illustrationen af de enkelte kompetencer.

Eksempel 1

I en lille varmeovn er der fire forskellige indstillinger, som giver stigende elektrisk energi eller effekt til varmeovnen, når man går fra trin 1 til 4. Stigningen i effekt fås ved at skifte mellem forskellige modstande og modstandskombinationer.

Nedenstående oplysninger og de efterfølgende formler vedrørende serieforbindelse, parallelforbindelse og den elektriske effekt skal benyttes til at besvare spørgsmålene a)–e).

Ved stilling 1 er modstandene forbundet i serie.

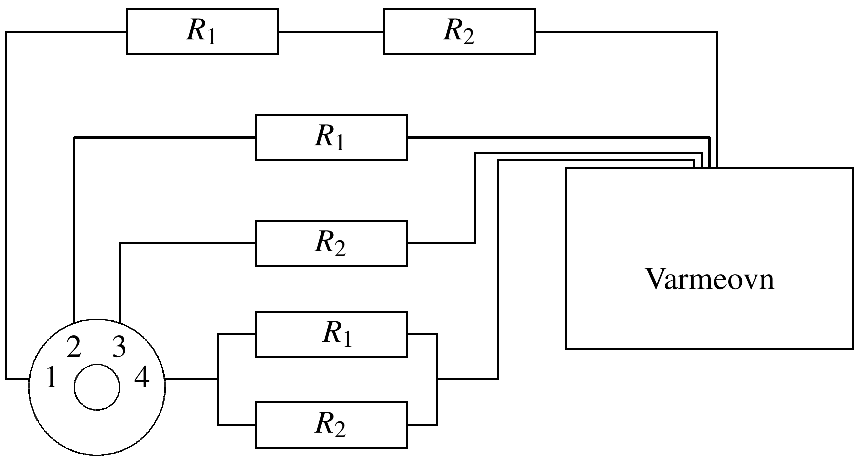
Ved stilling 2 er der en enkelt modstand.

Ved stilling 3 er der en enkelt modstand.

Ved stilling 4 er modstandene parallelt forbundet.

$R_1 = 150\,\Omega$ og $R_2 = 100\,\Omega$

Spændingen til ovnen er $U = 230\,\mathrm{V}$



a. Find den samlede modstand ved stilling 1 og 4.

b. Beregn effekten P ved stilling 1, 2, 3 og 4.

c. Tegn en graf over sammenhængen mellem de enkelte indstillinger (1, 2, 3 og 4) og effekten P, idet P er en funktion af indstillingerne 1, 2, 3 og 4.

d. Tegn en graf, hvor P er en funktion af modstandene $R1$, $R2$, $R3$ og $R4$.

e. Hvis graferne var sammenhængende i de to ovenstående spørgsmål, hvordan ville du da i ord beskrive forskellen på de to kurvers forløb?

Serieforbindelse
I serieforbindelse sidder modstandene på række, og spændingen deles i spændingsfald over de enkelte modstande, mens strømmen er konstant gennem hele serieforbindelsen.

$$U_{total} = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$$

$$R_{total} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

$$U_{total} = I \cdot R_{total}$$

$$u_1 = I \cdot R_1$$

$$u_2 = I \cdot R_2$$

$$u_3 = I \cdot R_3$$

$$u_4 = I \cdot R_4$$

$$I \cdot R_{total} = I \cdot R_1 + I \cdot R_2 + I \cdot R_3 + I \cdot R_4$$

Parallelforbindelse
I en parallelforbindelse sidder modstandene parallelt, og strømmen deles. Spændingen er konstant over hele parallelforbindelsen.

$$U_{total} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

$$\frac{1}{R_{total}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

$$I_1 = \frac{U}{R_1}$$

$$I_2 = \frac{U}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{U}{R_3}$$

$$I_4 = \frac{U}{R_4}$$

$$I_{total} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \frac{U}{R_4}$$

Den elektriske effekt

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

Det elektriske effekttab kan beregnes af $P = I^2 \cdot R$.

Modstanden i en elektrisk leder af et bestemt materiale af et bestemt tværsnitsareal og en bestemt længde kan udregnes ved følgende formel:

$R = \dfrac{\delta \cdot L}{A}$, hvor

R er modstanden, enhed Ω

L er længden af lederen, enhed m

A er tværsnitsarealet, enhed mm^2

δ er lederens modstandskoefficient enhed $\Omega \cdot \mathrm{mm}^2 \cdot \mathrm{m}^{-1}$

Spændingsfaldet i en leder kan beregnes ved: $\Delta U = U_1 - U_2 = I \cdot R$, hvor I er strømmen gennem lederen, og R er modstanden i lederen.

Eksempel 2

Varmeovnen fra forrige opgave bliver placeret i et lille arbejdsskur, hvor tilledningskablet, der er af kobber, har er tværsnitsareal $q = 1{,}5\,\mathrm{mm}^2$, og en længde $l = 53{,}5\,\mathrm{m}$ (2-leder).

Modstandskoefficienten for kobber: $\rho = 0{,}0175\,\Omega \cdot \mathrm{mm}^2/\mathrm{m}$.

a. Beregn modstanden i tilledningen (brug formlen fra bilag).

b. Beregn spændingsfaldet ΔU i tilledningen, når strømstyrken $I = 3{,}9\,\mathrm{A}$.

c. Hvor stort bliver effekttabet i lederen?

d. Hvis 1 kWh koster 1,99 kr. og varmeovnen varmer i 12 timer om ugen i 24 uger, hvor meget vil tilledningen (i teorien) forøge elregningen med?

Eksempel 3

Følgende tre motorer påtænkes udskiftet med henblik på at få dem ind i tilskuds-ordningen.

a. Beregn de 3 motorers virkningsgrader.

Motor1

EFU	Type 1LA3166		
$3\supseteq$Mot.		Nr.197903	
;	380/660 V	24,3/14 A	;
	11 kW	$\cos\omega\ 0,7/0,8$	
96 o/min	50 Hz		
VDE 053072	Isol. Kl. B	IP44	

Motor 2

0624268	Mot. $3\supseteq$ 50 Hz Iec 34-1-1960 MBL 132 SA 38-2 S43 5,5 kW 7,5 hp - 2900 r/min 380 V $<$ 11A CLASS B $\cos\omega = 0,90$ Cat. No MK 141 002-AB 42 kg

Motor 3

1424-27	Mot. $3\supseteq$ 50 Hz Iec 34 MBL 132 SA 38-2 IP54 1,5 kW 2860 r/min 380 VY $<$ 3,3A CLASS B $\cos\omega = 0,86$ Cat. No MK 110 009-A

b. Opstil beregningseksempler for de 3 motorer, når den årlige driftstid er på 3500 timer og kWh-prisen 0,97 kr.

c. Sammenlign priserne med brug af tilsvarende motorer, der er defineret som sparemotorer.

F.2.2 Tankegangskompetence

Karakteristik

På elektrikeruddannelsen består denne kompetence dels i at *være klar over*, hvilke slags spørgsmål som er karakteristiske for matematik, i selv at kunne *stille sådanne spørgsmål*, og i at have blik for hvilke typer af svar, som kan forventes, dels i at *kende og håndtere* givne matematiske *begrebers rækkevidde og begrænsning*.

Kommentar

De aspekter ved matematisk tankegang, der vægtes inden for elektrikerområdet, skal ses i forhold til ellærens teoretiske del og til omsætningen af denne til praksis.

Udover den elementære matematik, omfattende størrelser, tal og forskellige geometriske objekter, og simple relationer mellem disse, angår kompetencen matematiske udsagn i forbindelse med tekniske el-spørgsmål. De spørgsmål, der stilles ud fra givne betingelser, har formen " hvor mange?", "hvor meget?" og " hvad?" (eller "hvilke?"), og vedrører i hovedsagen el-tekniske forhold.

Det at stille spørgsmål, som kun kan besvares ved brug af matematik, er en af de ting, som eleverne skal være i stand til. I elektrikeruddannelsen berøres en mangfoldighed af matematiske forhold med henblik på at opøve elektrikerne i at vide, hvor og hvornår de skal bruge hvilken slags matematik og i hvilke sammenhænge. Derimod er spørgsmål og svar af mere teoretisk matematisk karakter ikke på dagsordenen i uddannelsen. Gennem beskæftigelsen med mange opgaver som de ovenstående, men også med langt mere komplicerede, opnår eleverne en konkret erfaring med spørgsmål, der er karakteristisk for matematikken, men i en el-teknisk belysning.

Selvom det ofte er temmelig komplekse beregninger, der foretages under elektrikeruddannelsen, vil evnen til at skelne mellem forskellige slags udsagn og begreber forblive på et ret intuitivt plan. Det samme er tilfældet med matematiske begrebers rækkevidde, som ikke udtrykkeligt gøres til genstand for behandling i uddannelsen.

Eksemplificering

De tre eksempler viser lidt af den mangfoldighed af matematikholdige problemstillinger, uddannelsen rummer, og antyder den matematiske tankegangskompetence, eleven skal besidde.

I Eksempel 1 ovenfor er opgaven fastlagt og typisk for begyndelsen af uddannelsen. Spørgsmålene – på formen "beregn!" eller "find!" – er stillet på forhånd, men eleven skal have et blik for arten af svarene – de skal fx være entydige og rigtige – og for, at det kræver matematiske metoder at finde dem. Det samme er tilfældet med Eksempel 3.

Elektrikereleven skal på et tidspunkt i sin uddannelse være blevet i stand til at arbejde med problemstillinger, der er bredere formuleret, end tilfældet er i de nævnte eksempler. Ud over at vide, hvordan problemstillingen skal gribes an (jf. problembehandlingskompetencen) skal eleven have blik for hvilke typer af matematiske udsagn, der kan tjene som svar på problemstillingen.

F.2.3 Problembehandlingskompetence

Karakteristik

På elektrikeruddannelsen består denne kompetence dels i at kunne *opstille*, dvs. detektere, formulere, afgrænse og præcisere forskellige slags matematiske problemer, "rene" såvel som "anvendte", "åbne" såvel som "lukkede", dels i at kunne *løse* sådanne matematiske problemer i færdigformuleret form, egnes såvel som andres, og om fornødent eller ønskeligt på forskellige måder.

Kommentar

Denne kompetence er hos elektrikerne kun på dagsordenen i mindre omfang, når det gælder rent matematiske problemer. Dog arbejder elektrikereleven i begyndelsen af uddannelsen med at løse færdigformulerede, rene matematiske problemer og anvendte problemer, som ikke er el-tekniske. Ellers skal elektrikereleven kunne udnytte mange forskellige træk ved og områder af matematikken for at kunne løse anvendte el-problemer, som af gode grunde er af stor betydning i uddannelsen.

Eleverne skal således kunne detektere og afgrænse forskellige matematiske problemer i en anvendelsessammenhæng. For de fleste problemstillinger er der færdigopstillede matematiske udtryk og formler, som kommer i anvendelse, når først eleven har gennemskuet problemstillingen.

I svendeprøveprojektet aktiverer eleverne problembehandlingskompetencen over for en problemstilling, som både er bred og kompleks. Det sker i forbindelse med udarbejdelsen af konkrete matematiske modeller, som gerne lægges ind i regneark, der tillader undersøgelser af løsningerne som funktion af forskellige inputstørrelser.

Eksemplificering

I den indledende fase af uddannelsen er de typiske problemstillinger, som skal behandles, beslægtede med varmeovnseksemplet, men der optræder også lignende, men mindre sammensatte problemstillinger. Derfor arbejder eleverne i begyndelsen af uddannelsen med løsningen af færdigformulerede matematiske problemer, såsom

- "Løs ligningen…"
- "Indsæt værdierne i udtrykket og beregn…"
- "Find siderne i den retvinklede trekant *ABC*, givet vinkel A og hypotenusen."

Der sker en opfølgning med opgaver fra el-faget, som ligner den umiddelbart behandlede matematik, både hvad angår strukturen og brugen af matematiske teknikker.

Senere i uddannelsen arbejder eleverne med løsningen af anvendte matematiske problemer, og ikke kun af el-teknisk art, men også af økonomisk art, som i Eksempel 3 med de tre motorer. I svendeprøveprojekter er der ofte eksempler på gennemregning af en mindre installation, hvor der udlægges en struktur, som bygger på udnyttelse af serie- og parallelforbindelser som vist i Eksempel 1. For hver installationsdel er der en beregning, der fastlægger strukturens egenskaber på en måde, som skal tilfredsstille både de foreliggende installationskrav og sikkerhedskravene i stærkstrømsbekendtgørelsen. Installationsdelene kan være forskellige typer af belysning, et komfur, en vaskemaskine, et automatanlæg osv. Hver installationsdel har indflydelse på den samlede installations strømforbrug og spændingsfald og dermed på sikkerhedskravene i installationen. I denne proces skal elektrikeren kunne detektere, formulere, afgrænse og præcisere problemstillingerne, også i matematisk henseende, selv om de på forhånd har færdigformulerede modeller eller procedurer til rådighed.

F.2.4 Modelleringskompetence

Karakteristik

På elektrikeruddannelsen består denne kompetence dels i at kunne *analysere* grundlaget for og egenskaberne ved foreliggende modeller og at kunne bedømme deres rækkevidde og holdbarhed. Hertil hører at kunne "*afmatematisere*" (træk ved) foreliggende matematiske modeller, dvs. at kunne afkode og fortolke modelelementer og -resultater i forhold til det felt eller den situation som er modelleret. På den anden side består kompetencen i at kunne *udføre aktiv modelbygning* i en given sammenhæng, dvs. at bringe matematik i spil og anvendelse til behandling af anliggender uden for matematikken selv.

Kommentar

Analysesiden af denne kompetence kommer navnlig til syne, når elektrikeren skal analysere grundlaget for et projekt, som er baseret enten på beregninger, tegninger eller på foreliggende faktiske el-tekniske forhold. Elektrikeren skal også kunne afkode og fortolke de enkelte elementer i projektet.

Ved planlægning og udførelse af et el-projekt skal elektrikeren være aktiv modelbygger. Elektrikeren skal kunne strukturere, matematisere, behandle, validere, kritisk analysere, kommunikere om, have overblik over og kunne styre modelbygningen i sit projekt. Dette finder i særlig grad sted ved svendeprøveprojektet. Her bliver der både set på den samlede model (et diagram over installationen) og enkeltelementerne. Til bedømmelse af modellen anvendes evalueringen fra læreren og skuemestre, mens det ikke er almindeligt, at eleven skal analysere sit eget arbejde.

Den uddannede elektriker skal kunne foretage fejlfinding og kontrolberegninger over en installation, også i tilfælde, hvor der blot foreligger en enkelt eller to kontrolmålinger. Men målingen vil ofte være et udtryk for beregninger, som ligger bag den betragtede installation. Og disse beregninger må kontrolleres, hvis der er tale om alvorlige fejl, fx forkert dimensionering af et anlæg. Der kan selvfølgelig også være tale om elementære, men alvorlige fejl i selve installationen.

Dette antyder nogle af grundene til, at en elektriker skal besidde matematisk modelleringskompetence, både i analytisk og aktiv forstand. Der må i omgangen med modellerne ikke ske beregningsmæssige fejltagelser, så det matematiske grundlag for beregningerne, kontrolmålingerne osv. skal være i orden. Undervisningen skal bibringe eleverne denne kompetence, så de opnår en vis sikkerhed i at analysere deres beregninger, at se nærmere på enkeltelementer i disse, og i at være en aktiv modelbygger af el-systemer.

Eksemplificering

De tre eksempler ovenfor kan betragtes som eksempler på simpel modelbygning i en meget bunden form. I varmeovnstilfældet er givet nogle betingelser, som skal struktureres og "matematiseres" ud fra de givne formler. Resultaterne skal kommunikeres ved en grafisk fremstilling. Derimod efterspørges ingen kritisk analyse af modellen i disse eksempler.

I eksemplet med de tre motorer er der lagt op til opstilling af en simpel økonomimodel, som tager et politisk forhold i betragtning – en tilskudsordning, der giver ejere af motorer tilskud, hvis energiforbruget kan nedsættes med en vis størrelse. Modelbygningen er, ligesom under varmeovnseksemplet, struktureret sådan, at det centrale elements virkningsgrad er angivet på forhånd. Men her skal eleven matematisere på baggrund af en større mængde oplysninger og selv finde de relevante formler og regneudtryk. En sådan progression fortsætter op igennem elektrikeruddannelsen, hvor eleverne formulerer stadig mere komplekse modelprojekter, som derefter afprøves på virkelige installationer.

F.2.5 Ræsonnementskompetence

Karakteristik

På elektrikeruddannelsen består denne kompetence dels i at kunne *følge* og *bedømme* et *matematisk ræsonnement*, dvs. en kæde af argumenter fremsat af andre på skrift eller i tale til støtte for en påstand, herunder at forstå den logiske betydning af et *modeksempel*. Det indgår tillige i kompetencen at kunne *afdække de bærende idéer i et matematisk bevis*, herunder skelne mellem hovedpunkter og detaljer, mellem idéer og teknikaliteter. Dels består kompetencen i at kunne *udtænke og gennemføre* informelle ræsonnementer (på basis af intuition).

Kommentar

Denne kompetence har kun en reduceret og informel status hos elektrikerne. Selv om de skal kunne følge et matematisk ræsonnement, bedømmer de ikke de matematiske argumenter, der bruges i ræsonnementet. Da det er de tekniske beregninger og udsagn, der er i fokus, er det snarere argumenter fra el-faget selv, eller af almen "fornuftbetonet" art, der anvendes.

Ræsonnementskompetencen er med andre ord tæt forbundet med de praktiske beregninger, som skal udføres. Det kan fx være, at eleven gennem en beregning skal opnå en værdi, der falder ind under rammerne i en bestemt tabel. De matematiske argumenter ligger i selve beregningen, mens vurderingen af resultatet knytter sig til, om tabelværdien overholdes.

Mindre matematiske ræsonnementer bruges nu og da til at give eleverne en baggrund for at opnå indsigt i de elektriske fænomener, en elektriker skal være bekendt med. Men sådanne ræsonnementer dyrkes ikke meget, og, når det sker, mest som en forberedelse til eventuel videre uddannelse, fx til installatør. Derimod har ræsonnementskompetence sigtende mod beherskelse af matematik som selvstændigt fag ingen plads i elektrikeruddannelsen.

Eksemplificering

Der kan gives en del eksempler på informelle ræsonnementer, som fx :

- Hvis varmeovnen i Eksempel 2 skal yde sin maksimale effekt, og spændingsfaldet i tilledningen til skuret er for stort, må ledningen skiftes.
- Elektriske ledere producerer varme, når der løber en strøm igennem dem. Modstanden i lederen er en af årsagerne til varmeudviklingen, og modstanden er afhængig af lederens tværsnit. Så tværsnittet i lederen skal med andre ord afpasses efter omgivelserne. I stærkstrømsreglementets standarder kan eleverne finde de relevante værdier.

Ofte erstattes de matematiske ræsonnementer med huskeregler, fx når eleverne regner på parallelforbindelser som i varmeovnseksemplet. Her er det en huskeregel, at "den samlede modstand skal være mindre end den mindste". Den kunne i stedet vises med nogle simple matematiske argumenter med to modstande.

Vi har jo, at $\frac{1}{R_{samlet}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, som viser, at $R_{samlet} = \frac{1}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$. Heraf følger, da både $\frac{R_1}{R_1+R_2} < 1$ og $\frac{R_2}{R_1+R_2} < 1$, at $R_{samlet} < R_1$ og $R_{samlet} < R_2$. Altså er den samlede modstand mindre end den mindste.

Men elektrikerne benytter altså huskereglen, som bliver indarbejdet ved adskillige opgaver, hvor der indgår parallelforbindelser.

F.2.6 Repræsentationskompetence

Karakteristik

På elektrikeruddannelsen består denne kompetence dels i at kunne *forstå* (dvs. afkode, fortolke og skelne mellem) og *betjene sig af* forskellige slags repræsentationer af matematiske objekter, fænomener, problemer eller situationer (herunder symbolske, specielt algebraiske, visuelle, geometriske, grafiske, diagrammatiske, tabelmæssige eller verbale repræsentationer, men også konkrete repræsentationer ved materielle objekter), dels i at kunne forstå de indbyrdes *forbindelser* mellem forskellige repræsentationsformer for det samme sagsforhold og have kendskab til deres styrker og svagheder, herunder informationstab og -tilvækst, dels i at kunne *vælge* blandt og *oversætte* imellem forskellige repræsentationsformer for et givet sagsforhold, alt efter situation og formål.

Kommentarer

Elektrikereleverne skal ikke så meget forstå som kende til forskellige repræsentationer af matematiske forhold. De skal også kunne se sammenhæng mellem visse former for repræsentation, samt have fornemmelse for hvilken information man får ved en type repræsentation i forhold til en anden. Eleven skal lære at bestemte forhold og problemstillinger, der skal gives en matematisk beskrivelse, har foretrukne repræsentationer i branchen, som passer til reglementer, mærkeplader, standarder osv.

Også elektriske måleinstrumenter med visere, grafer osv. leverer matematiske repræsentationer af størrelser og funktioner, som elektrikeren skal kunne forstå og betjene sig af.

Eksemplificering

Eksempel 1 bygger på Ohms lov, $U = R \times I$, effektloven, $P = U \times I$, samt reglerne for serie- og parallelforbindelse. Eleverne skal kunne omforme de to love til både sproglige udsagn og til grafisk form. Det grafiske billede skal eleverne kunne give en sproglig fremstilling af, fx ved en beskrivelse af på hvilken måde grafen vokser eller aftager, hvad det er udtryk for, og hvilke konsekvenser det får. Man forventer også, at eleverne i denne sammenhæng kan se forskellen på fremstilling af enkeltværdier (en udregnet størrelse) og fremstilling ud fra en mængde af værdier, gerne et interval.

I stærkstrømsreglementet er der angivet betingelser og grænser ved enkeltværdier af fx spændingsfaldet over en elektrisk leder, som findes ud fra den elektriske leders modstand. Modstanden som enkeltværdi kan eleverne enten beregne selv ved formelregning eller slå op i et tabelværk.

I Eksempel 3 skal eleverne kunne afkode og betjene sig af en særlig fremstilling af data, før den bliver anvendelig til en beregning, der fører til sammenligning af to størrelser.

F.2.7 Symbol- og formalismekompetence

Karakteristik

På elektrikeruddannelsen består denne kompetence dels i at kunne *afkode* symbol- og formelsprog, i at kunne *oversætte* frem og tilbage mellem symbolholdigt matematisk sprog og naturligt sprog, og i at kunne *behandle og betjene sig af* symbolholdige udsagn og udtryk, herunder formler.

Kommentarer

Meget af elektrikersproget består af et matematisk symbolsprog udtrykt ved formler som Ohms lov, effektloven, energiudtryk osv. Disse formler skal eleverne kunne behandle, omforme og betjene sig af ved at betragte og løse dem som ligninger. Elektrikereleven "ved", at matematikanvendelsen følger et logisk begrundet system, som han ikke behøver at undersøge yderligere. Elektrikerne betjener sig af et symbol- og formholdigt sprog med mange faste indeksnotationer. Således betyder U_N spændingen i det elektriske netværk, der ligger uden for hus- og virksomhedsinstallationerne.

Eleverne skal kunne oversætte frem og tilbage mellem "naturligt" sprog omhandlende el-tekniske forhold og symbolholdigt matematiksprog. Bl.a. skal elektrikeren kunne forklare betydningen af en værdi, han er nået frem til.

Eksemplificering

I Eksempel 1 bliver eleverne bedt om at finde den rigtige formel til den aktuelle beregning. De skal her vide, hvad symbolerne i formlen dækker over. Desuden skal de gennem symbolbehandlingen kunne beregne sig frem til et "meningsfuldt" resultat, altså en effekt (i Watt) der "passer" med den sædvanlige effekt for en varmeovn.

Derfor skal de kunne afkode symbolsprog, som oversættes til matematisk formalisme, en “ligning” som løses, hvorefter det oversættes tilbage til det el-tekniske sprog igen. Eleverne ved, at de gennem korrekt løsning af en elteknisk ligning kommer frem til en entydig og “sikker” løsning, som kan kontrolleres. Derfor ved elektrikereleven, at når beregningerne og ræsonnement slutter med, at ledningen skal skiftes, handler han på en “sikker” grund dannet af matematik.

Elektrikerne arbejder med forskellige formler i mange forskellige sammenhænge i forbindelse med opgaver af ovenstående type. Enten bruges formlerne til at bestemme enkeltløsninger eller til at fremstille funktionsudtryk.

I Eksempel 3 kan man på mærkepladen se et af elektrikerens mange særlige symboler, som ofte er i spil i deres omgang med matematik. Et stort Y betyder en stjerneforbindelse, hvilket angiver, at elektrikeren skal forbinde motoren i en stjerneforbindelse, og at han skal beregne forbindelsen som en sådan.

F.2.8 Kommunikationskompetence

F.2.9 Karakteristik

På elektrikeruddannelsen består denne kompetence dels i at kunne *sætte sig ind i og fortolke* andres matematikholdige skriftlige, mundtlige eller visuelle udsagn og “tekster”, dels i at kunne *udtrykke sig* på forskellige måder og på forskellige niveauer af teoretisk eller teknisk præcision om matematikholdige anliggender, skriftligt, mundtligt eller visuelt over for forskellige kategorier af modtagere.

Kommentarer

Den uddannede elektriker skal helst være en god rådgiver for kunder, der skal have udført el-arbejde, både når det gælder økonomiske overvejelser og overvejelse over de farer, der er forbundet med elektriske installationer.

Elektrikere skal naturligvis også kunne diskutere installationerne med kolleger.

Den uddannede elektriker skal kunne følge med i den teknologiske udvikling inden for el-området, især udviklingen i elektroniske systemer og internationale standarder, som ofte er beskrevet i matematikholdigt sprog.

Alt dette rummer fordringer om et vist mål af matematisk kommunikationskompetence hos elektrikeren.

Eksemplificering

Eleven skal kunne forklare modtageren af varmeovnen sammenhængen i installationen, fx forskellen på at anvende ovnen på højeste blus i 4 timer eller den laveste indstilling i et døgn. Desuden skal han kunne give et bud på, hvad det koster kunden.

Eksempel 3 er et indlysende eksempel på rådgivningstjeneste, hvor elektrikeren bringes i den situation at skulle forklare kunden, hvorfor han ikke kan få tilskud. Det kan indebære en gennemgang af beregningerne, eller i det mindste en forklaring af deres resultat. Begge dele har et vist matematisk indhold.

Det er installatøren, der er ansvarlig for en installation, og det er ham, der udarbejder installationen. Men en elektriker skal have et vist grundlag for selv at vurdere og diskutere med kolleger, om installationen og de materialer der skal bruges til installationen er rigtige. Også det indebærer matematikholdig kommunikation.

I dag ser man ofte en central styring af fx et parcelhus' installationer. Det betyder, at elektrikeren skal kunne sætte sig ind i elektronisk styresystemer, som typisk indeholder en del matematiske beskrivelser. I det hele taget stiller den tekniske udvikling med nye enheder og systemer med særlige specifikationer krav om, at elektrikeren skal kunne forstå og forholde sig til beskrivelser og specifikationer med matematiske islæt.

F.2.10 Hjælpemiddelkompetence

Karakteristik

På elektrikeruddannelsen består denne kompetence dels i *have kendskab til* eksistensen og egenskaberne ved diverse former for relevante redskaber til brug for matematisk virksomhed, og have indblik i deres *muligheder og begrænsninger* i forskellige slags situationer, dels i at være i stand til, på reflekteret vis, at *betjene sig af* sådanne hjælpemidler.

Kommentarer

Der anvendes måleudstyr med mange forskellige funktioner i en elektrikers hverdag. En lommeregner er en naturlig del af dette udstyr. En computer vil også være et typisk hjælpemiddel til beregninger af større opgaver og til grafisk fremstilling og dokumentation af matematikholdige sagsforhold. Også passer, lineal og vinkelmåler har elektrikeren nu og da brug for at betjene sig af.

Eksemplificering

Beregningerne i Eksempel 1 kunne med fordel udføres i fx et regneark. Eleverne ville herved samtidig kunne udføre den grafiske del af opgaven. Derudover ville de kunne demonstrere variationen af effekten ved regulering af modstandens størrelse. Faktisk løses mange el-opgaver i dag på denne måde. Der findes også særlige programmer, som kan sætte fx varmeovnens modstandskonstruktion op, så eleven ikke selv behøver at gennemføre beregning og tegning af grafen.

Der kunne også anvendes regneark i Eksempel 3, såfremt man ville udføre et større sæt af beregninger og vise flere eksempler. Også dette kunne kombineres med grafik.

F.3 Om de forskellige former for overblik og dømmekraft

Disse har ikke megen relevans for elektrikerfaget, bortset fra når det gælder overblik og dømmekraft vedrørende matematikkens faktiske anvendelse i samfundet. Elektrikerne eksemplificerer selv den samfundsmæssige anvendelse af matematik. De er derfor på det rene med, at andre håndværksfag, samt ikke mindst ingeniørfag, i større eller mindre udstrækning benytter sig af matematik til en mangfoldighed af formål. Derimod har andre former for samfundsbrug af matematik ikke nogen høj prioritet i uddannelsen.

G Datamatikeruddannelsen som eksempel på en kort videregående uddannelse

G.1 Generelle kommentarer

Datamatikeruddannelsen[1] er en kort videregående professionsorienteret uddannelse, der i løbet af de to et kvart år, uddannelsen er normeret til, sigter mod at uddanne softwareudviklere. Ved softwareudvikling spiller matematik en rolle på mange niveauer, og således også i datamatikeruddannelsen.

Der er følgeligt mange områder i datamatikeruddannelsen, hvor matematiske kompetencer anvendes og udvikles. Et programmeringssprog er et formelt sprog med en veldefineret syntaks og til dels semantik, og alene derfor er det uundgåeligt, at matematik dukker op i forskellige sammenhænge, og enkelte matematiske emner er da også eksplicit nævnt i fagbilaget til bekendtgørelsen for datamatikeruddannelsen.

G.2 Matematiske kompetencer i datamatikeruddannelsen

G.2.1 Tankegangskompetence

Karakteristik

På datamatikeruddannelsen består dennne kompetence i at *være klar over* hvilke slags spørgsmål, som er karakteristiske for matematik, i selv at kunne *stille sådanne spørgsmål*, og i at *have blik for hvilke typer af svar*, som kan forventes.

[1] Ud over arbejdsgruppen har Michael Caspersen, Jens Helveg Larsen, Hans Søndergaard og Jørn Vesterdal på afgørende måde bidraget til skabelsen af dette kapitel.

Kommentar

Denne kompetence er ikke central i datamatikeruddannelsen, men i situationer, hvor genstandsområdet for konkrete programmeringsopgaver er af matematisk natur (for eksempel programmering af en funktion, der kan foretage primtalsfaktorisering af et heltal eller programmering af eksponential- og/eller logaritmefunktioner), kan kompetencen med fordel opøves. I sådanne konkrete situationer er det i øvrigt lettere at motivere udforskningen af egenskaber ved de pågældende matematiske begreber.

Eksemplificering

Hvad angår det at kunne stille spørgsmål og have blik for hvilke typer af svar, som kan forventes, kan det for eksempel dreje sig om programmering af en funktion, der kan afgøre, om et tal er et primtal. Det egentlige mål med øvelsen er konstruktion af en funktion med en ikke-triviel løkke; primtals-domænet er blot et (traditionelt) eksempel.

Eksempel 1:

```
boolean isPrime (n)//metoden skal afgøre, om n er et primtal
{
  for (i = 2; i < ?; i++)
    if (i går op i n)
      return false;
  return true;
}
```

De matematiske spørgsmål, man her kan stille – og som relaterer sig til antallet af iterationer og dermed algoritmens effektivitet – er fx:

- Hvor langt skal man gå i ovenstående test? – helt op til *n*, eller kan der stoppes tidligere?

Spørgsmål af den karakter sætter gang i en tankeproces omkring egenskaber ved tal i relation til primtalsbegrebet, og gennem processen udvikler eleven (forhåbentlig) en analytisk evne, som er essentiel og langt mere vidtgående end det konkrete matematiske domæne (i dette tilfælde primtal).

Eksempel 2: Kompeksitetsovervejelser vedrørende eksempelvis søgelængder, sorteringsalgoritmer osv. Herved kræves forståelse for størrelsesordener og de dramatiske konsekvenser af deres forskelligheder (lineære, binære/logaritmiske, eksponentielle osv.).

De matematiske spørgsmål, man her kan stille, er fx:

- "Hvorfor er binær søgning mere effektiv end lineær søgning?"
- "Hvis $n = 10\,000$, hvor længe skal man da i værst tænkelige tilfælde søge ved lineær/binær søgning?"

G.2.2 Problembehandlingskompetence

Karakteristik

På datamatikeruddannelsen består denne kompetence i at kunne *løse* både "åbne" og "lukkede" matematiske problemer, primært af "anvendt" karakter.

Kommentar

I forhold til grundkarakteristikken i kapitel 4 trænes datamatikeren ikke i at kunne detektere, formulere, afgrænse og præcisere matematiske problemer. Derimod stilles en datamatiker over for en række matematiske problemstillinger, som skal løses; dette sker typisk for at blive fortrolig med og få dybere indsigt i et bestemt datamatisk fagområde.

Eksemplificering

Problemfelterne kan fx være

- effektivitetsovervejelser og -beregninger, som foretages for at få dybere indsigt i kvantitative egenskaber ved algoritmer og datastrukturer.
- kapacitetsberegninger, som foretages for at få dybere indsigt i naturen af forskellige lagrings- og kommunikationsmedier.
- korrekthedsargumenter, som foretages for at få dybere indsigt i kvalitative egenskaber ved algoritmer og datastrukturer.

Mere konkret kan det dreje sig om problemer som de følgende, der er repræsentative for en række tilsvarende problemer specielt inden for algoritmik, men også inden for datakommunikation m.m.

- "Hvor mange elementer kan der maksimalt lagres i et B^+-træ af orden 6?"

  Her forventes det, at den studerende kan anvende sin viden om eksponentialfunktioner i kombination med kendskabet til opbygningen af B^+-træer til at besvare spørgsmålet.

- “Hvad er en øvre grænse for antal ombytninger i udvalgssortering?”

  Her forventes det, at eleven kan anvende sine grundlæggende kompetencer til at tælle i forbindelse med kendskabet til principper for algoritmers udførelse.

- “Hvad er en øvre grænse for antal sammenligninger i binær søgning?”

  Som foregående.

- “Hvor mange effektive datapakkebits kan der sendes på en given pakkefordelt kommunikationslinie, herunder hvor stor en procentdel af båndbredden bruges til adminstration?”

  Her forventes det, at eleven kan kombinere sin viden om principper for og teknikker til kommunikation af data med grundlæggende kompetencer inden for aritmetik, specielt procent- og brøkregning.

- “Virker algoritme X korrekt (dvs. i overensstemmelse med specifikationen) for input Y?”

  Her forventes det, at eleven kan kombinere en (mere generel) ræsonnementskompetence med kendskabet til principper for algoritmers semantik (herunder udførelse) til at argumentere for en given algoritmes korrekthed for et givet input.

- “Bevis korrektheden af følgende rekursive algoritme. . . ”

  Som foregående, men da der er tale om en rekursiv algoritme, skal specielt ræsonnementskompetencen, anvendt i forbindelse med induktionsbeviser, mere eksplicit på banen.

G.2.3 Modelleringskompetence

Karakteristik

På datamatikeruddannelsen består dennne kompetence i at kunne *analysere* grundlaget for og egenskaberne ved foreliggende modeller og at kunne bedømme deres rækkevidde og holdbarhed. Hertil hører at kunne “*afmatematisere*” (træk ved) foreliggende matematiske modeller, dvs. at kunne afkode og fortolke modelelementer og -resultater i forhold til det felt eller den situation som er modelleret. På den anden side består kompetencen i at kunne *udføre aktiv modelbygning* i en given sammenhæng, dvs. at bringe matematik i spil og anvendelse til behandling af anliggender uden for matematikken selv.

Kommentar

Generelt omhandler softwareudvikling at transformere et behov udtrykt i menneskesprog til et edb-program udtrykt i matematisk sprog (operationer i det binære talsystem). Denne transformation er abstrakt og omhandler opbygning af modeller, der via mapning bliver mere og mere matematiske. I forhold til datamatikeruddannelsen er modelleringskompetence således en central matematisk kompetence.

Nogle har forsøgt at gøre systemudvikling til en rent matematisk disciplin ("ingeniørvinklen"), hvor de indledende dele af modelleringsprocessen ikke spiller nogen væsentlig rolle, men det har vist sig, at dette ikke er muligt. Årsagen er, at der er mennesker involveret, såvel i processen, men også direkte i resultatet, idet ændringer i organisation, adfærd og kultur generelt også er en del af produktet.

Eksemplificering

Følgende eksempel kan illustrere det at *kunne analysere grundlaget for og egenskaberne ved foreliggende modeller, og at kunne bedømme deres rækkevidde og holdbarhed*:

- Når man i designfasen af softwareudvikling har lavet en model (eksempelvis et databasedesign udtrykt i den relationelle model, som angiver, hvilke tabeller med attributter og domæner, der er brug for, samt sammenhængene mellem disse), og bestemt, hvorledes de nødvendige transaktioner (forespørgsler) skal udføres, skal der ske en mapning til et konkret databasesystem. For at kunne gøre dette skal man være i stand til at analysere grundlaget for og egenskaberne ved de to modeller, og man skal kunne bedømme deres rækkevidde og holdbarhed. Man skal kunne forstå, at eksempelvis domænebegrebet ikke umiddelbart kan realiseres i et databasesystem via typebegrebet, da et domæne potentielt har en uendelig værdimængde, mens en type har en endelig værdimængde. Og man skal kunne finde en løsning herpå.

Udarbejdelse af et databasedesign er et eksempel (blandt mange) på *aktiv modelbygning*, som i forhold til dette prototypiske eksempel kan karakteriseres som bestående af elementerne

- *Strukturering:* Hvilke tabeller og egenskaber og sammenhænge skal indgå?
- *Matematisering og Behandling:* Specifikation af hvorledes transaktioner skal udføres, udtrykt i den relationelle algebra.
- *Validering:* Er designet hensigtsmæssigt? Dette undersøges ved at checke normalformerne.
- *Kritisk analyse:* Understøtter designet performancekravene og transaktionsbehovene?
- *Kommunikation:* Modellen skal være i overensstemmelse med analysemodellen og skal kunne realiseres på den valgte teknologiske platform – dette kræver, at den kan kommunikeres til de ansvarlige for disse aktiviteter.

- *Overblik og styring:* Er nødvendig for at kunne overholde tidsmæssige deadlines (projektstyring og projektledelse er derfor væsentlige emner på datamatikeruddannelsen).

Fra investeringsteorien, der er et af de områder, datamatikere ofte arbejder i, optræder spørgsmål som:

- "Hvad vil du helst have – 10 000 kr. nu eller 500 kr./måned i 3 år?"
- "Er det bedst at investere i en ny eller brugt bil?"

Besvarelse af disse spørgsmål løses ved hjælp af eksisterende matematiske modeller i skikkelse af formler (eksempelvis nutidsværdiberegninger). Eleverne skal kunne vælge mellem de mange tilgængelige formler, hvilket indebærer, at de skal afkode og fortolke de indgående elementer i forhold til den konkrete situation. Modelleringskompetence udvikles således her i tæt samspil med symbol- og formalismekompetence.

G.2.4 Ræsonnementskompetence

Karakteristik

På datamatikeruddannelsen består dennne kompetence på den ene side i at kunne *følge og bedømme* et *matematisk ræsonnement*, dvs. en kæde af argumenter fremsat af andre på skrift eller i tale til støtte for en påstand, herunder at forstå den logiske betydning af et modeksempel.

På den anden side består kompetencen i at kunne *udtænke og gennemføre* informelle og *formelle ræsonnementer* (på basis af intuition), herunder omforme heuristiske ræsonnementer til egentlige (gyldige) beviser.

Kommentar

Her er der heller ikke tale om en kernekompetence for datamatikere, men der er dog eksempler inden for visse områder af datamatikken (områder som traditionelt behandles relativt overfladisk på datamatikeruddannelsen).

Eksemplificering

Hvad angår det at kunne følge og bedømme et matematisk ræsonnement, kan det fx komme til udtryk i forbindelse med analyse af en algoritmes effektivitet som følger:

Eksempel 1: Binær søgning nævnt ovenfor: bestemmelse af tidskompleksiteten.

Uformelt ræsonnement: der sker en halvering hver gang.

Lidt mere formelt ræsonnement: forsøge at opstille (og løse) en ligning, der, på grundlag af det uformelle ræsonnement, forbinder antallet af objekter der skal søges i blandt (n), med antallet af skridt (x) søgningen omfatter:

$$2^x = n \iff x = \log_2 n$$

Et andet eksempel er anvendelse af standardiserede bevisteknikker som fx induktionsbeviser, som spiller en central rolle i flere forskellige sammenhænge inden for datamatikken.

Eksempel 2: Induktionsbevis på simple eksempler, som bevis for

$$1+2+\ldots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Et tredie eksempel er inden for matematisk logik (propositions- og prædikatkalkule).

Eksempel 3: Logiske udtryk i programmering

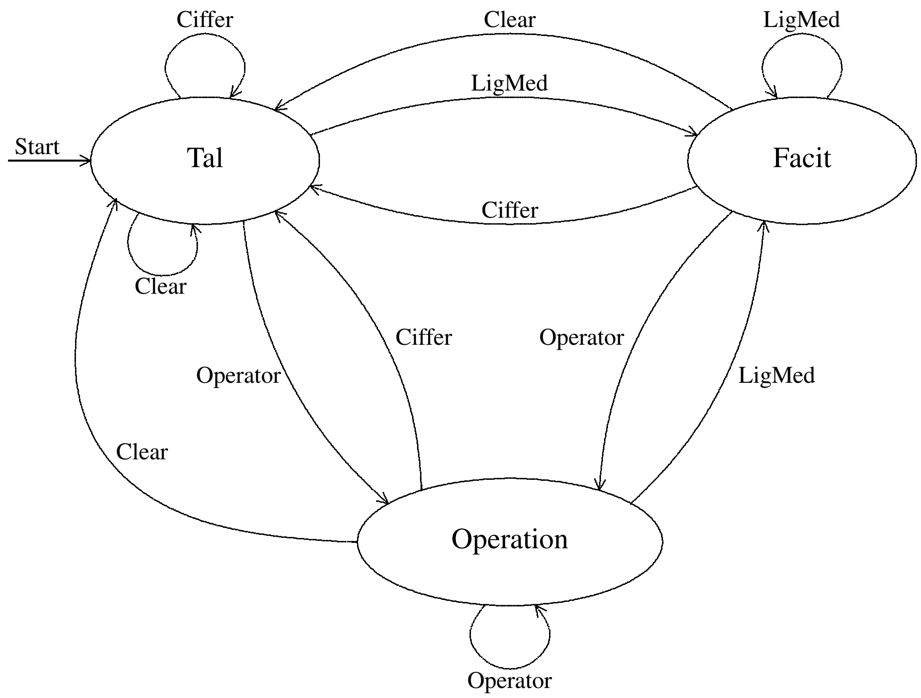
```
if (not a or not b)  if (not a and not b) if (not (a and b))
{                    {                     {
  ..                   ..                    ..
}                    }                     }
```

Det "formelle ræsonnement" vil typisk være at opskrive sandhedstabeller for de forskellige logiske udtryk. Ved hjælp af eksempler (modeksempel) kan man indse, at `not (a and b)` og `not a and not b` ikke er det samme.

Hvad angår det at kunne udtænke og gennemføre informelle og formelle ræsonnementer (på basis af intuition), herunder omforme heuristiske ræsonnementer til egentlige (gyldige) beviser, kan det fx dreje sig om analyse af inddata (eksempel 4) eller udledning af matematiske resultater, som at finde et lukket udtryk for summen $1+2+\ldots+n$ (eksempel 5).

Eksempel 4: Tilstandsdiagrammer:

Tilstands-/overgangsdiagram for simpel lommeregner (kun heltal, samt de fire regneoperatorer har samme prioritet). Et færdigt resultat vises i figur G.1, men inden da skal man igennem uformelle overvejelser, som begrunder overgangene, samt påvise, at diagrammet er udtømmende (beskriver alle indtastningsmuligheder på den simple lommeregner).



Figur G.1 Tilstands-/overgangsdiagram for simpel lommeregner (kun heltal; desuden har de fire regneoperatorer her samme prioritet).

Eksempel 5: Uformelt ræsonnement på følgende:

Bestem $1+2+..+n$.
Prøv at lægge første og sidste tal sammen. Hvad giver det?
Tag derefter det andet tal og det næstsidste tal.

Problemer hvis n er ulige? Hvis n = 1?

Når man er kommet gennem disse uformelle ræsonnementer, vil det være naturligt at prøve at lave et formelt ræsonnement.

Anvendelse eller optakt til ovenstående sum kunne være:

```
for (i = 0; i < n; i++)
  for (j = 0; j < i; j++)
    ..
```

Hvor mange gennemløb?
Tidskompleksitet: $O(n)$?, $O(n^2)$?

G.2.5 Repræsentationskompetence

Karakteristik

Denne kompetence består dels i at kunne *forstå* (dvs. afkode, fortolke og skelne mellem) og *betjene sig af* forskellige slags repræsentationer af matematiske objekter, fænomener, problemer eller situationer (herunder symbolske, specielt algebraiske, visuelle, geometriske, grafiske, diagrammatiske, tabelmæssige eller verbale repræsentationer, men også konkrete repræsentationer ved materielle objekter), dels i at kunne forstå de indbyrdes *forbindelser* mellem forskellige repræsentationsformer for det samme sagsforhold og have kendskab til deres styrker og svagheder, herunder informationstab og -tilvækst, dels i at kunne *vælge* blandt og *oversætte* imellem forskellige repræsentationsformer for et givet sagsforhold, alt efter situation og formål.

Kommentar

Karakterstikken her er uafgrænset i forhold til grundkarakteristikken i kapitel 4, hvilket kan tages som udtryk for, at repræsentationskompetence har en central placering i datamatikeruddannelsen. Valg af (matematisk) repræsentationsform, vurdering af alternativer og konvertering imellem forskellige repræsentationsformer er således meget centralt for datamatikere.

Eksemplificering

Vedrørende det at *kunne forstå og betjene sig af forskellige slags repræsentationer af matematiske objekter, fænomener, problemer eller situationer* kan peges på følgende forhold, som er repræsentative for en række tilsvarende eksempler. De har alle en matematisk kerne (typisk involverende logik, mængdelære og diskret matematik), selv om de optræder i datamatisk iklædning:

Sondringen mellem specifikation (hvad) og implementation (hvordan) af abstrakte datatyper: Her forventes det, at eleven kender en række fundamentale abstrakte typer (stak, kø, prioritetskø, liste, mængde, multimængde, map) samt alternative implementationer af disse (array, kædet liste, cirkulær liste, bunke, søgetræ, hashtabel).

Regneudtryk, udtrykstræer og præcedensregler: Her forventes det, at eleven kender syntaks og semantik for forskellige typer af udtryk, herunder prefix-, infix- og postfix-udtryk, samt teknikker til beskrivelse heraf i form af udtrykstræer og præcedensgrammatikker og evaluering ved hjælp af trægennemløb (pre-, in- og postorder-gennemløb).

Talsystemer og konvertering mellem disse: Her forventes det, at eleven kender til principet for positionstalsystemer og specielt er fortrolig med 2-, 8-, 10- og 16-talsystemet, som er de fremtrædende talsystemer inden for datamatikken. Specielt skal eleven kunne konvertere frem og tilbage mellem disse talsystemer.

Det at *kunne forstå de indbyrdes forbindelser mellem forskellige repræsentationsformer for det samme sagsforhold og have kendskab til deres styrker og svagheder, herunder informationstab og -tilvækst* drejer sig især om relationen mellem specifikation og implementation af såvel algoritmer som datastrukturer – også de af en matematisk natur – for eksempel

Specifikation og implementation af datatyper og beregninger: Her forventes det, at eleven kender teknikker til abstrakt (det vil sige implementationsuafhængig) specifikation af datatyper og beregninger fx i termer af funktionelle specifikationer ved hjælp af såkaldte præ- og post-betingelser.

Typehierarkier: Her forventes det, at eleven kender til principper for afkobling af programkomponenter ved at programmere op mod abstrakte datatyper (interfaces eller abstrakte klasser), hvor samme abstrakte type kan dække over vilkårligt mange, og op til den fælles abstrakte type, vilkårligt forskellige konkrete datatyper. I den forbindelse (specielt i forbindelse med simulering af "genericity") kan der opstå behov for såkaldt "downcast" for at genskabe information om objektets konkrete datatype.

Formelle sprogklasser og automater: Her forventes det, at eleven kender til forskellige klasser af formelle sprog (specielt regulære og kontekstfri sprog) samt tilhørende grammatikker og automater, der kan henholdsvis generere og genkende disse sprog. Specielt forventes eleven at være fortrolig med forskellen på de forskellige sprogklasser og de tilhørende automater (reguære og kontekstfri sprog versus endelige automater og "push-down" automater).

Hvad angår det at *kunne vælge blandt og oversætte imellem forskellige repræsentationsformer for et givet sagsforhold, alt efter situation og formål*, drejer det sig især om evnen til at kunne beskrive systemer på forskellige abstraktionsniveauer og efter forskellige perspektiver. Der er utallige eksempler på dette inden for datamatik, men her skal blot nævnes tre områder, hvor denne del af repræsentationskompetencen er essentiel:

Systembeskrivelse: Her forventes det, at eleven kender teknikker til beskrivelse af statiske såvel som dynamiske aspekter af systemer, samt beskrivelser på typeniveau såvel som instansniveau, og endelig grafiske såvel som tekstuelle beskrivelser af de samme sagsforhold (fx klasse og objektmodeller, sekvensdiagrammer, tilstandsmaskiner, partielle ordninger af hændelser osv.).

E/R-model versus relationel datamodel: Her forventes det, at eleven kender til datamodellering ved hjælp af E/R-modellen, samt er fortrolig med teknikker til omformning af en E/R-model til en relationel datamodel, der kan danne grundlaget for realisering i et konventionelt relationelt databasesystem.

Den lagdelte computer: Her forventes det, at eleven kender til principper for hierarkisk organisering af en computers hardware og software i et antal (abstrakte) virtuelle maskiner, hvor relationen mellem de enkelte niveauer er realiseret ved hjælp af oversættelse og/eller fortolkning.

G.2.6 Symbol- og formalismekompetence

Karakteristik

På datamatikeruddannelsen består dennne kompetence i at kunne *afkode* symbol- og formelsprog, i at kunne *oversætte* frem og tilbage mellem symbolholdigt matematisk sprog og naturligt sprog, og i at kunne *behandle og betjene sig af* symbolholdige udsagn og udtryk, herunder formler. Dels i at *have indsigt i* karakteren af og "spillereglerne" for formelle matematiske systemer (typisk aksiomatiske teorier).

Kommentar

En datamatiker adskiller sig væsentligt fra en datalogisk/matematisk uddannet kandidat derved, at datamatikeren som hovedregel *benytter matematiske læresætninger/resultater* og kun i mindre omfang beviser disse sætningers gyldighed. Datamatikeren får derved behov for at have udviklet kompetence i forhold til at sætte sig ind i resultater, som vedkommende ikke nødvendigvis kan bevise, men som vedkommende har tiltro til er rigtige eller sandsynlige.

Som før nævnt omhandler generelt softwareudvikling at transformere et behov udtrykt i menneskesprog til et edb-program udtrykt i matematisk sprog (det binære talsystem). Denne transformation er abstrakt og omhandler opbygning af modeller, der via mapning bliver mere og mere matematiske, jf. kommentaren til modelleringskompetence. Hermed anvendes symbolsprog og formalisme mere og mere, jo længere man er fremme i udviklingprocessen.

Således udfordres datamatikeren ofte på en vanskeligt adskillelig måde på sin besiddelse af modelleringskompetence, repræsentationskompetence, samt symbol- og formalismekompetence, hvilket også kommer til udtryk i nedenstående eksemplificering.

Eksemplificering

I realiseringsfasen af et softwareudviklingsprojekt udtrykker man sig meget i matematisk symbolsprog og formalisme (et programmeringssprog). Som programmør er det nødvendigt at kunne afkode et program og forstå, hvad det udfører, for at kunne foretage fejlretning og eventuelt videreudvikling. Her foretages såvel "afkodning af symbolsprog" som det at "oversætte frem og tilbage mellem symbolholdigt matematisk sprog og naturligt sprog" i vid udstrækning. Også i analyse- og designfaserne af en udviklingsproces udøves symbol- og formalismekompetencen, om end den "verden", der arbejdes i, bliver mindre matematisk, jo længere væk man kommer fra edb-maskinen.

Konkret kan det eksempelvis handle om

- At kunne udtrykke og fortolke en algoritme/edb-funktion/edb-system.
- Udarbejde et program/en algoritme samt afkode samme.

Det at *behandle og betjene sig af formler* er der allerede givet et par eksempler på i forbindelse med eksemplificeringen af modelleringskompetencen. Her kan vi tilføje

- kompleksitets-, performance- og kapacitetsberegninger,
- forudseelse af eventuelle flaskehalse i et computernetværk, samt
- utallige problemstillinger fra investeringsteori og regnskabsanalyse

som eksempler på områder inden for datamatikeruddannelsen, hvor formler er i spil i stor udstrækning.

Indsigt i karakteren af og "spillereglerne" for formelle matematiske systemer kommer fx i spil i forbindelse med

- udtrækning af data fra en relationel database, hvor det er nødvendigt med kendskab til mængdelære.
- formulering ved hjælp af grafer (der i datamatik ofte antager formalismekarakter) samt afkodning af disse (eksempelvis klassediagrammer, tilstandsmaskiner, data-flow-diagrammer m.v.).
- udarbejdelse af en algoritme, hvor det er nødvendigt at have indsigt i logik, eksempelvis "if-then-else" konstruktionen.

G.2.7 Kommunikationskompetence

Karakteristik

På datamatikeruddannelsen består denne kompetence i at kunne *sætte sig ind i og fortolke* andres matematikholdige skriftlige, mundtlige eller visuelle udsagn og "tekster", dels i at kunne *udtrykke sig* på forskellige måder og på forskellige niveauer af teoretisk eller teknisk præcision om matematikholdige anliggender, skriftligt, mundtligt eller visuelt over for forskellige kategorier af modtagere.

Kommentar

Typiske “modtagere” er medstuderende, lærere, brugere af it-systemer, beslutningstagere i virksomheder/det offentlige vedr. it-systemudvikling eller it-anskaffelser m.v.

Eksemplificering

Næsten alle de eksempler, som tidligere er givet til illustration af de øvrige kompetencer, kan også tjene til at eksemplificere kommunikationskompetence i og med matematik, hvorfor et enkelt eksempel nævnt her må række:

- At læse og forstå et program, der ikke er skrevet af én selv, kan opfattes som et eksempel på, at man sætter sig ind i et matematikholdigt anliggende for at uddrage den logik, som benyttes i programmets algoritme- og datastruktur.

  Kommunikationskompetencen tydeliggøres derefter yderligere, når der skal udarbejdes en brugervejledning til dette program/system. Eksempelvis i beskrivelsen af inddata og uddata fra programmet, samt selve programmets logik.

  Alt dette (m.m.) skal datamatikeren kunne formidle skriftligt, mundtligt og visuelt til mange forskellige målgrupper og med forskellige niveauer af teoretisk og teknisk præcision. Målgrupper er beslutningstagere, brugere, systemudviklere, programmører, driftsafdeling, systemprogrammører osv.

G.2.8 Hjælpemiddelkompetence

Karakteristik

På datamatikeruddannelsen består dennne kompetence i dels i at *have kendskab til* eksistensen og egenskaberne ved diverse former for relevante redskaber til brug for matematisk virksomhed, og have indblik i deres *muligheder og begrænsninger* i forskellige slags situationer, dels i at være i stand til, på reflekteret vis, at *betjene sig af* sådanne hjælpemidler.

Kommentar

På datamatikeruddannelsen bruges – ikke overraskende – en lang række it-redskaber, som jo i sig selv kan være et matematisk hjælpemiddel. Flere af disse it-redskaber har indbyggede matematiske hjælpemidler, hver især med mange muligheder og begrænsninger i forhold til forskellige anvendelsesområder/problemstillinger.

Eksemplificering

Også her kunne en lang række af de tidligere nævnte eksempler genbruges med en påpegning af, hvilke hjælpemidler der forventeligt vil være i spil ved arbejdet med de forskellige opgaver. Udover at pege på den oplagte brug af lommeregner, regneark, pc osv. vil vi nøjes med et eksempel, hvor udvikling af matematikforståelse og betjeningen af et stykke software går hånd i hånd:

- Forespørgselssproget SQL til relationelle databaser baseret på mængdelære og prædikatkalkylen er genstand for, at eleven via sin matematiske viden udnytter disse muligheder på mere eller mindre avanceret niveau. Det er her, at refleksionen over betjeningen kommer ind: Skal jeg søge denne mængde først, og dernæst denne? Eller skal jeg først selektere efter dette kriterium, for derefter at udsøge det endelige resultat?

  Tilsvarende eksempler kan nævnes fra programmeringsdisciplinen, eksempelvis når man i et Java-program benytter matematikbiblioteker (sqrt, sin, trunc . . .).

H Universitetsuddannelser i matematiske fag

H.1 Generelle kommentarer

På universiteterne optræder matematik, matematikundervisning og matematikkompetencer i mange forskellige fagområder, under mange forskellige former og med meget forskellig vægt.

På den ene side har vi uddannelserne i matematiske fag, som omtales nærmere i næste afsnit. På den anden side har vi uddannelser, hvori *matematik er hjælpefag*. Denne status som hjælpefag varierer inden for et bredt spektrum. I den ene ende kan det forudsættes, at de studerende allerede besidder visse matematiske kompetencer, som studiet uden videre trækker på (fx jura, medicin) uden at søge dem udbygget i selve studiet. Ind imellem findes dels studier (fx psykologi), der rummer kurser (ofte såkaldte "metodekurser"), som ikke har et matematisk navn, men som ikke desto mindre rummer matematiske kompetencer, fx i sammenhæng med data(re)præsentation og statistik, dels studier (fx geofag, biologi, kemi, økonomi), som rummer kurser i særligt tilpasset "fagrelevant" matematik. I den anden ende af spektret træffer vi studier (fx fysik og ingeniørfag), som trækker så massivt på en flerhed af matematiske kompetencer, at det ofte kan være vanskeligt at afgøre, hvor matematikken holder op, og faget begynder.

Det siger sig selv, at det ikke vil være muligt i en rapport som denne at yde denne mangfoldighed af studier, hvori matematik er hjælpefag, retfærdighed. Dertil er de fagspecifikke omstændigheder for varierende. Gennemgående for dem alle er dog, at modelleringskompetence, og de kompetencer som støtter den, står i centrum i alle disse studier. Det betyder, at også problemløsnings-, repræsentations-, symbol- og formalisme-, samt hjælpemiddelkompetencerne sædvanligvis har en vis vægt. Hvor kompetencerne optræder, er det karakteristisk, at de sjældent optræder med fuld dækningsgrad, samtidig med at både den aktionsradius og det tekniske niveau, de udøves på, gerne er meget fokuseret på den studiefaglige substans, de skal bringes i spil over for.

Mangfoldigheden taget i betragtning har vi, som antydet, fundet det nødvendigt at afstå fra at eksemplificere kompetencerne i forhold til sådanne studier. Det beklager vi egentlig, bl.a. fordi en sådan eksemplificering kunne tjene til at artikulere, hvad matematiske kompetencer består i og gør godt for i disse forbindelser, men også fordi eksemplerne ville være klargørende for forståelsen af matematikundervisningens rolle i uddannelsessystemet som helhed. I stedet har vi bestræbt os på i eksemplificeringen af kompetencerne over for de matematiske fag, som skal omtales nedenfor, at vælge i det mindste nogle eksempler, som også kan være meningsfulde i forhold til matematik som hjælpefag.

H.2 Matematiske kompetencer i universitetsuddannelser i matematiske fag

Under denne rubrik inkluderer vi alle universitetsuddannelser, der sigter mod at uddanne matematikere til funktioner i forskning eller i videregående anvendelse af matematik, uanset hvilke titler, der benyttes for de studieprogrammer, uddannelserne foregår under. Vi tænker altså ikke kun på cand.scient.'er i matematik, men også på kandidater i forsikringsvidenskab, matematisk statistik, teoretisk datalogi, operationsanalyse osv. Vi er helt på det rene med, at disse uddannelser rummer andre væsentlige momenter end matematik, men at disse momenter oftest i en eller anden grad er sammenvævede med matematik. Sådan set omfatter denne gruppe også kommende lærere til gymnasiale og videregående niveauer, men de er jo viet et særligt kapitel i denne rapport og skal derfor ikke omtales nærmere her.

Fælles for disse uddannelser — og det der begrunder betegnelsen "matematiske fag" – er, at de alle forudsætter matematiske kompetencer med fuld dækningsgrad, om end med varierende vægt på de forskellige kompetencer. For såkaldt "rene" matematikere, dvs. personer der skal varetage matematisk forskning eller generelle anvendelsesfunktioner, lægges der traditionelt særlig vægt på tankegangs-, problembehandlings-, ræsonnements-, repræsentations- samt symbol- og formalismekompetencerne, og nu og da hjælpemiddelkompetencerne, mens modellerings- og kommunikationskompetencerne ofte tillægges relativt mindre vægt. Omvendt lægges der for de "anvendte" matematikere særlig vægt på modellerings-, repræsentations- og hjælpemiddelkompetencerne, og nu og da også på kommunikationskompetence, hvilket imidlertid ikke må forstås sådan, at de øvrige kompetencer af den grund tillægges ringe vægt.

Forskellene mellem de matematiske uddannelser ligger i, at de enten fokuserer på særlige genstandsområder for matematikanvendelsen (såsom forsikringsanliggender, IT-systemer) eller på særlige, overgribende matematiske problemstillinger og fænomentyper af betydning for anvendelserne (stokastisk variation, optimering, operationer og beslutninger), eventuelt på en kombination af de to. Imidlertid kommer disse forskelle, som nævnt, ikke til udtryk i kompetencernes dækningsgrad, men i de sammenhænge og situationer, de udøves i. Dette er, på sin side, dels et spørgsmål om aktionsradius og teknisk niveau, hvor der i begge tilfælde er tale om en specialisering i retning af genstandsområder eller fænomentyper, dels et spørgsmål om forbindelsen til de matematiske emner (fx sandsynlighedsregning, statistik, diskret matematik og optimering), som kompetencerne bringes i spil overfor.

Af denne grund er der efter vores opfattelse ikke noget forgjort i at behandle kompetencerne i universitetsuddannelser i matematiske fag under ét. De eksempler, som er valgt nedenfor, er i de fleste tilfælde valgt fra de første par år af universitetsundervisningen. I ikke så få tilfælde kan selve det matematiske stof, der er indeholdt i eksemplerne, træffes i skolen - og det er bevidst - men det tekniske niveau, der fordres af den kompetence, som eksemplificeres, bringer den ikke desto mindre op på et universitært plan.

Vi har her, hovedsagelig af pladshensyn, udeladt de almene kommentarer, som i kapitel 4 var indføjet for at klargøre den enkelte kompetences relation til andre kompetencer.

H.2.1 Tankegangskompetence

Karakteristik

I universitetsuddannelserne i matematik består denne kompetence for det første i at *være klar over* hvilke slags spørgsmål, som er karakteristiske for matematik, i selv at kunne *stille sådanne spørgsmål*, og i at *have blik for hvilke typer af svar*, som kan forventes. Af særlig vigtighed er her matematikkens efterstræbelse af nødvendige og tilstrækkelige betingelser for et objekts besiddelse af en given egenskab.

Den består tillige i at *kende*, *forstå* og *håndtere* givne matematiske *begrebers rækkevidde* (og begrænsning) og deres forankring i diverse domæner, i at kunne udvide et begreb ved *abstraktion* af egenskaber i begrebet, i at kunne *forstå* hvad der ligger i *generalisering* af matematiske resultater og selv at kunne generalisere sådanne til at omfatte en større klasse af objekter.

Denne kompetence omfatter også det at kunne *skelne*, både passivt og aktivt, mellem *forskellige slags matematiske udsagn* og påstande, herunder “betingede udsagn”, “definitioner”, “sætninger”, “fænomenologiske påstande” om enkelttilfælde, og “formodninger” baseret på intuition eller erfaringer med specialtilfælde. Af særlig betydning er her forståelsen af den rolle, eksplicitte eller implicitte “kvantorer” spiller i matematiske udsagn, ikke mindst når de kombineres.

Eksemplificering

Karakteristiske spørgsmål i matematik har ofte en prototypisk skikkelse à la, “Findes der. . . ?”, “Hvor mange. . . ?”, “Kan det tænkes at. . . ?”, “Er påstanden nødvendig eller tilstrækkelig, eller begge dele?”, “Kan man slække på de gjorte forudsætninger uden at ændre konklusionen?”.

Svarene kan typisk have formen “Ja, fordi. . . ”, “Nej, fordi. . . ”, “Påstanden er nødvendig, men ikke tilstrækkelig, som følgende eksempel viser. . . ”, “Det afhænger af situationen, idet...", "Det er et åbent spørgsmål...", "Hvis... så...", "Der gælder... hvis og kun hvis...".

Konkrete illustrationer af *karakteristiske spørgsmål og svar* kunne *fx* være:

A: "Hvor mange forskellige binære $n \times n$-matricer findes der?"

B: "2^{n^2}."

A: "Hvor lange kan primtalsløse stræk af naturlige tal være?"

B: "Vilkårligt lange. For ethvert n findes en sekvens af n på hinanden følgende naturlige tal, som er sammensatte, nemlig $(n+1)!+2, (n+1)!+3 \ldots (n+1)!+(n+1)$."

A: "Er det sandt, at der findes sandsynlighedsfordelinger, som ikke har nogen middelværdi?"

B: "Ja, Cauchy-fordelingen."

A: "Er det sandt, at der findes funktioner, der er kontinuerte på et åbent interval, men som ikke er differentiable i noget punkt af intervallet? Hvis ja, hvor mange findes der så af den slags?"

B: "Ja, det er sandt. Der findes uendeligt mange sådanne funktioner."

A: "Hvornår er restklasseringen $(Z_n, +, \cdot)$ et legeme?"

B: "Præcis når n er et primtal."

A: "Er værdimængden for et tredjegradspolynomium altid hele mængden af reelle tal?"

B: "Ja."

A: "Gælder det samme for alle polynomier?"

B: "Nej, ikke for dem af lige grad."

A: "Findes der overhovedet nogen polynomier som har asymptoter?"

B: "Ja, men kun førstegradspolynomier (hvis grafer jo selv er asymptoter); bortset fra dem har ingen andre polynomier asymptoter."

A: "Udspringer topologien i et topologisk rum altid af en metrik?"

B: "Nej."

A: "Kan man give en karakterisering af de rum, hvor dette gælder, dvs. en ikke-triviel nødvendig og tilstrækkelig betingelse for metriserbarhed?"

B: "Ja, men karakteriseringen er mere til nytte for teoretiske undersøgelser end et redskab til umiddelbar afgørelse af, om et foreliggende topologisk rum er metriserbart."

A: "Kan man løse enhver lineær 2. ordens differentialligning eksplicit, dvs. med kendte funktionsudtryk?"

B: "Nej, ikke generelt. Kender man derimod en enkelt nulpunktsfri løsning til den homogene ligning, kan samtlige andre løsninger i princippet bestemmes eksplicit, nemlig ved integration."

A: "Hvor kommer de reelle tal fra? Er det muligt at give en egentlig konstruktion af systemet af reelle tal, eller må vi antage dem givet på forhånd ved hjælp af et aksiomsystem?"

B: "Man kan konstruere alle de sædvanlige talsystemer eksplicit ud fra de naturlige tal, som så må forudsættes givet, fx ved Peanos aksiomer. Konstruktionen kan ske på forskellige måder, typisk i en række skridt, der hvert involverer overgangen til en kvotientstruktur, hvor kompositionerne $+$ og $\cdot$ 'løftes op' til kvotientstrukturen. Først kan man konstruere de hele tal. Derefter de positive rationale tal, og straks efter de negative rationale tal. De reelle tal kan så konstrueres som ækvivalensklasser af Cauchyfølger af rationale tal, hvor ækvivalensrelationen regner to sådanne følger for ækvivalente, hvis deres differensfølge konvergerer mod 0. Så skal kompositionerne blot løftes med op, og det skal vises, at den således konstruerede talmængde opfylder de ønskede krav. Til slut sker konstruktionen af de komplekse tal (og videre af kvaternionerne og Cayley-tallene, hvis de skulle have interesse) på sædvanlig algebraisk vis."

A: "Denne konstruktion lyder som en opstigning gennem et kinesisk æskesystem af strukturer. Hvordan kan man så tale om, at de naturlige tal er en delmængde af de hele tal, som er en delmængde af de rationale tal, som er en delmængde af de reelle tal, osv.?"

B: "Det kræver også, at vi finder en kopi af hvert talområde inde i, fx, de komplekse tal, dvs. en delmængde som er isomorf (strukturidentisk) med det pågældende talområde."

A: "OK, men hvad så med konstruktionen af de reelle tal. Du sagde, at der var flere mulige måder at konstruere dem på. Havde man ikke fået et andet reelt talområde, hvis man havde valgt en af de andre konstruktioner?"

B: "Det er et rigtig godt spørgsmål. Faktisk er det ikke sådan, idet man kan vise, at alle talområder med de samme egenskaber som de reelle tal (dvs. alle fuldstændige, arkimedisk ordnede legemer) er isomorfe. Derved kan vi tænke på dem som identiske kopier af hinanden, og altså som udgørende ét system af reelle tal."

A: "Hvorfor får punkthændelserne ved en kontinuert sandsynlighedsfordeling på **R** sandsynligheden 0?"

B: "Fordi en overtællelig familie af positive tal ikke kan summeres til et endeligt tal, altså heller ikke til 1."

H.2.2 Problembehandlingskompetence

Karakteristik

I universitetsuddannelserne i matematik består denne kompetence dels i at kunne *opstille*, dvs. detektere, formulere, afgrænse og præcisere forskellige slags matematiske problemer, "rene" såvel som "anvendte", "åbne" såvel som "lukkede", dels i at kunne *løse* sådanne matematiske problemer i færdigformuleret form, egnes såvel som andres, og om fornødent eller ønskeligt på forskellige måder.

Eksemplificering

I betragtning af hvor centralt problemopstilling, problemformulering og problemløsning er i virksomheden i matematikundervisning på universitetsniveau, kan der gives endeløst mange eksempler på problemer og deres løsning. Eftersom problemløsning ofte er en kompliceret og langstrakt affære, er der grænser for hvor detaljerede eksempler vi kan give her. Nogle få kortere eksempler må række.

A: "Hvis man ikke kan huske formlen for addition af en endelig kvotientrække, hvordan kan man da udlede den selv?"

B: "Lad os betegne første led med a, kvotienten med q og antallet af led med n. Så skal vi altså finde summen $aq^0 + aq^1 + \ldots + aq^{n-1}$. Lad os benævne denne sum s_n, altså $s_n = aq^0 + aq^1 + \ldots + aq^{n-1}$. Vi bemærker først, at hvis $q = 0$ er opgaven overkommelig, idet $s_n = a$ for alle n. Noget tilsvarende gælder, hvis $q = 1$, idet vi da har, at $s_n = na$ for alle n. I det følgende undtager vi derfor de tilfælde, hvor $q = 0, 1$.

Vi får nu den idé at forlænge den nævnte identitet med q, så vi opnår den ækvivalente identitet (q er jo ikke 0): $qs_n = aq^1 + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n$. Omskrives højresiden til $a + aq^1 + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + aq^n - a$, ser vi, at den er lig $s_n + aq^n - a$. Da den samtidig var lig qs_n, har vi i alt skaffet os ligningen $s_n + aq^n - a = qs_n$ til bestemmelse af s_n (q er jo ikke 1). Løsningen er $s_n = a\frac{q^n-1}{q-1}$."

A: "Vi forestiller os en nål af længden 1 kastet på en plan, hvorpå der er givet et dobbelt uendeligt parallelbundt af linjer med afstanden 1 mellem to nabolinjer. Hvad er sandsynligheden for, at nålen skærer en linje?" (Dette problem kaldes ofte Buffons nåleproblem)

B: "Det afgørende for problemstillingen er åbenbart, om nålens endepunkter ved kastet falder på hver sin side af en linje (eventuelt falder ét endepunkt, eller begge, på en af linjerne), eller om begge falder ægte mellem de samme to nabolinjer. I det første tilfælde er der skæring med en linje, i det andet tilfælde ikke. I alle fald er det udelukkende endepunkternes placering på normaler til linjebundtet, der har betydning, hvorimod en translation parallelt med linjebundtet ikke ændrer på, om skæring indtræder eller ej.

På den baggrund kan vi parametrisere nålens stilling således. Nålens stilling er givet dels ved den entydigt bestemte placering af dens "nederste" endepunkt (hvis nålen lander parallelt med linjebundtet regner vi det venstre for det nederste), dels ved den entydigt bestemte vinkel i intervallet $[0,\pi[$, som nålen danner med linjerne i bundtet. Kaldes det nederste endepunkts afstand til den nærmeste overliggende linje for x, $x \in]0,1]$, og den vinkel, nålen danner med linjerne i bundtet (sædvanlig orientering), for ϕ, fastlægges nålens placering entydigt af talparret $(\phi,x) \in [0,\pi[\times]0,1]$.

Vi kan nu slå fast, at nålen skærer en linje, netop hvis $\sin(\phi) \geq x$. Antages nu talparrene (ϕ,x) ligefordelt i $[0,\pi[\times]0,1]$, kan denne hændelse tillægges sandsynligheden "arealet under sinusgrafen på intervallet $[0,\pi[$ divideret med arealet af rektanglet". Dette er netop $\frac{2}{\pi}$. Hermed er problemet løst."

A: "Hvis man kun havde mønter med værdierne 3 og 5, hvilke beløb kunne man så betale med disse mønter? Hvad hvis værdierne var a og b (naturlige tal), $a < b$?"

B: "Åbenbart kan der kun blive tale om heltallige beløb. Blandt dem kan man oplagt ikke betale beløbene 1, 2, 4 og 7. Men alle større heltalsbeløb kan rammes. Lad os først konstatere, at 6 kan nås med to 3-mønter, 8 med én af hver af mønterne, 9 med tre 3-mønter, og 10 med to 5-mønter. Kan vi indse, at alle beløb mellem 10 og 14 kan nås, er vi færdige, for så kan vi nå ethvert større beløb på følgende måde:

Ethvert naturligt tal, n, har en entydigt bestemt rest blandt tallene 0, 1, 2, 3, 4 ved division med 5. Det betyder, at der, hvis n er mindst 15, findes præcis ét helt tal $p > 2$ og én rest r blandt 0, 1, 2, 3, 4, så at $n = 5p + r$. Foretager vi nu omskrivningen $n = 5(p-2) + 10 + r$, vil $p-2$ være et positivt helt tal, mens $10 + r$ er et helt tal fra og med 10 til og med 14. Eftersom beløbet $5(p-2)$ kan betales med 5-stykker ($p-2$ stks), og beløbet $10+r$ falder inden for det fremhævede område og dermed pr. forudsætning også kan betales med 3- og 5-mønterne, kan også alle beløb fra og med 15 betales med disse mønter.

At beløbene 11, 12, 13 og 14 kan nås, ses ved simpel inspektion ($11 = 2\cdot 3+5$, $12 = 4\cdot 3$, $13 = 3+2\cdot 5$, $14 = 3\cdot 3+5$). Hermed er problemet løst." (Vi afstår fra at bringe løsningen på det generaliserede problem.)

A: "Hvis man skal udskære og rulle et stykke karton, så det fremstiller en skråt afskåret cirkulær cylinder, som i Planetariet i København, hvilken randkurve skal man så vælge i kartonets ene ende?”

B: “Lad os antage at den færdige cylinder har radius r, og at det laveste punkt på det plane, skrå “tag” skal have afstanden m fra grundplanen, og det højeste afstanden M. Lad os derefter indlægge et tredimensionalt koordinatsystem i cylinderen, sådan at både tagets lavpunkt og dets højdepunkt ligger i xz-planen og har koordinaterne hhv. $(r,0,m)$ og $(-r,0,M)$, og sådan at cylinderens akse er z-aksen.

Så vil aksens skæringspunkt med taget have koordinaterne $(0,0,(m+M)/2)$, mens $(M-m,0,2r)$ vil være en normalvektor til tagplanen. Repræsenterer vi det typiske punkt på skæringskurven mellem cylinderen og taget ved koordinaterne $(r\cos t, r\sin t, h(t))\,, t \in [0,2\pi[$, er det essentielt højdefunktionen h, som skal bestemmes. Det sker ved at forlange, at vektoren fra cylinderaksens skæringspunkt med taget til punktet på randkurven er vinkelret på den valgte normalvektor til tagplanen, dvs.

$$\left(r\cos t, r\sin t, h(t) - \frac{m+M}{2}\right) \cdot (M-m,0,2r) = 0,$$

altså

$$(M-m)r\cos t + 2rh(t) - r(m+M) = 0.$$

Heraf kan vi bestemme h:

$$h(t) = \frac{m+M}{2} - \frac{M-m}{2}\cos t\ ,\quad t \in [0,2\pi[\,.$$

Foretrækker vi at parametrisere højden som funktion af buelængden s (svarende til den underste side på kartonstykket), fremfor som funktion af drejningsvinklen t, har vi $(s = rt)$ sluttelig

$$H(s) = h(s/r) = \frac{m+M}{2} - \frac{M-m}{2}\cos(s/r)\ ,\quad s \in [0,2\pi r[\,.$$

Hermed er opgaven løst.”

- “Middelalderens naturfilosoffer betragtede følgende problem, som de anså for et paradoks: Hvis en cirkelring ruller et stykke på en ret linje, vil det til enhver tid laveste punkt på den inderste, henholdsvis den yderste cirkel gennemløbe samme strækning. Hvordan kan det forenes med, at den inderste cirkel har kortere omkreds end den yderste? Er der tale om et paradoks? ”
- “Undersøg hvad der sker i grænsen ved iteration af den affine funktion på **R** givet ved $f(x) = ax+b$. Dvs. undersøg $f^n(x_0)$ for $n \to \infty$ for alle værdier af a,b,x_0”
- “Hvorfor gælder den såkaldte 9-prøve, at 9 går op i et naturligt tal, opskrevet i 10-talsystemet, netop hvis 9 går op i tallets tværsum?”

H.2.3 Modelleringskompetence

Karakteristik

I universitetsuddannelserne i matematik består denne kompetence på den ene side i at kunne *analysere* grundlaget for og egenskaberne ved foreliggende modeller og at kunne bedømme deres rækkevidde og holdbarhed. Hertil hører at kunne "*afmatematisere*" (træk ved) foreliggende matematiske modeller, dvs. at kunne afkode og fortolke modelelementer og -resultater i forhold til det felt eller den situation som er modelleret. På den anden side består kompetencen i at kunne *udføre aktiv modelbygning* i en given sammenhæng, dvs. at bringe matematik i spil og anvendelse til behandling af anliggender uden for matematikken selv.

Aktiv modelbygning indeholder en række forskellige elementer. Først at kunne *strukturere* det felt eller den situation der skal modelleres. Dernæst at kunne gennemføre en *matematisering* heraf, dvs. en oversættelse af objekter, relationer, problemstillinger m.v. til et område af matematikken, resulterende i en matematisk model. At kunne *behandle* den opståede model, herunder løse de matematiske problemer den måtte give anledning til, samt at kunne *validere* den færdige model, dvs. bedømme dens holdbarhed både internt (i forhold til modellens matematiske egenskaber) og eksternt (dvs. i forhold til det felt og den situation modellen omhandler). Der indgår tillige at kunne *analysere modellen kritisk*, både i forhold til dens egen brugbarhed og relevans og i forhold til mulige alternative modeller, og at kunne *kommunikere* med andre om modellen og dens resultater. Endelig indgår det i aktiv modelbygning at have *overblik* over og kunne *styre* den samlede modelleringsproces.

Eksemplificering

Når det gælder *analysen af foreliggende (eller foreslåede) modeller*, kan man fx

- undersøge den model, Danmarks Statistik benytter til jævnlige fremskrivninger af udviklingen i den næste 30-års-periode af den danske befolkning, fordelt på køn og alder, fx med henblik på klarlægge modellens følsomhed over for forandringer i nøgleparametre som fertilitet, dødskvotienter og migration osv.

- undersøge den preskriptive model, som benyttes til fejlrettende kodning af CD'ere. (Dette hører hjemme på et lidt videregående niveau.)

Hvad angår *aktiv modelbygning*, kan man fx opstille en model til behandling af udfordringer som de nedenstående. I alle tilfælde er det nødvendigt at foretage afgrænsninger, gøre antagelser, eller indhente data for at behandlingen kan foretages. I nogle tilfælde kan der desuden være brug for at tilegne sig nyt matematisk eller andet stof.

- "Hvor meget bliver et reb kortere af, at der slås en enkelt løkke på det?"
- En vurdering af hvor dyrt det er at tale i mobiltelefon.
- Opstilling af en generel model til balancering af kemiske ligninger, sådan at der både tages hensyn til stofbalancer og ladningsbalancer.
- "Hvordan hænger omdrejningstallet sammen med tidsforløbet i en videobåndoptager?"
- "Hvordan skal man stille henholdsvis spejlet på en overheadprojektor og projektionsskærmen, sådan at billedet af et rektangel bliver et rektangel?"
- En vurdering af hvor stor en del af energiforbruget i Danmark der kan dækkes af vindmøller, og hvor mange møller det ville give anledning til.
- "Hvordan udvikler antallet af AIDS-tilfælde i Danmark sig?"
- "Er der et sted, hvor det er bedst at stille sig for at kunne betragte et maleri i et museum?"

H.2.4 Ræsonnementskompetence

Karakteristik

I universitetsuddannelserne i matematik består denne kompetence på den ene side i at kunne *følge* og *bedømme* et *matematisk ræsonnement*, dvs. en kæde af argumenter fremsat af andre på skrift eller i tale til støtte for en påstand, specielt at vide og *forstå* hvad et matematisk *bevis* er, og hvordan det adskiller sig fra andre former for matematiske ræsonnementer, fx heuristiske ræsonnementer hvilende på intuition eller på betragtning af specialtilfælde, og at kunne afgøre hvornår et matematisk ræsonnement faktisk udgør et bevis, og hvornår ikke. Heri indgår at forstå den logiske betydning af et *modeksempel*. Det indgår tillige i kompetencen at kunne *afdække de bærende idéer i et matematisk bevis*, herunder skelne mellem hovedpunkter og detaljer, mellem idéer og teknikaliteter.

På den anden side består kompetencen i at kunne *udtænke og gennemføre* informelle og *formelle ræsonnementer* (på basis af intuition), herunder omforme heuristiske ræsonnementer til egentlige (gyldige) beviser.

Eksemplificering

Som eksempler på det *at følge og bedømme et matematisk ræsonnement* kan nævnes:

A: "Har man en konvergent følge af kontinuerte funktioner på et interval, er grænsefunktionen kontinuert."

B: "Nej, som følgende modeksempel viser, er påstanden forkert, idet fx funktionsfølgen f_n, givet ved $f_n(x) = x^n, x \in [0,1]$ er punktvis konvergent mod grænsefunktionen f, $f(x) = 0$, for $x \in [0,1[$, $f(1) = 1$, og f er jo åbenbart ikke kontinuert."

A: "Enhver kontinuert, reel funktion $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$, som opfylder $f(x+y) = f(x) + f(y)$ for alle $x, y \in \mathbf{R}$, må være lineær, dvs. en proportionalitet af formen $f(x) = ax, x \in \mathbf{R}$ for et eller andet reelt tal a.

Det indses således. Lad os kalde $f(1)$ for a. Så følger det uden videre ved induktion, at $f(n) = nf(1) = na$, så påstanden er sand for alle naturlige tal n. Eftersom $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$, følger, at $f(0) = 0 = a0$. Så følger videre, at f er en ulige funktion, dvs. $f(-x) = -f(x)$, idet $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$. Specielt er for alle negative hele tal $f(-n) = -f(n) = -an$, hvorved påstanden er sand for alle hele tal. For at betragte f på de rationale tal, ser vi på de naturlige tal p og q. Eftersom $a = f(1) = f(\frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q}) = f(\frac{1}{q}) + \ldots + f(\frac{1}{q}) = qf(\frac{1}{q})$ (de indgående summer har q led) er $f(\frac{1}{q}) = a\frac{1}{q}$. For det naturlige tal p har vi så (de følgende summer har p led) $f(\frac{p}{q}) = f(\frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q}) = f(\frac{1}{q}) + \ldots + f(\frac{1}{q}) = pf(\frac{1}{q}) = pa\frac{1}{q} = a\frac{p}{q}$. Eftersom vi ved, at f er ulige, virker den også på de rationale tal som en proportionalitet med proportionalitetskonstanten a.

Hidtil har vi kun benyttet, at f er additiv. For at sikre, at f er lineær på hele $\mathbf{R}$, må vi udnytte, at f er kontinuert. (Ellers er påstanden simpelthen forkert. Man kan vise, at der findes diskontinuerte og dermed ikke-lineære løsninger til funktionalligningen.)

Argumentet for lineariteten fuldføres således: Lad os med g betegne funktionen $g(x) = ax$ for alle $x \in \mathbf{R}$. Eftersom både f og g er kontinuerte, er deres differens det også, og mængden $\mathcal{M} = \{x \in \mathbf{R} | f(x) – g(x) = 0\}$ er dermed afsluttet (lukket) i $\mathbf{R}$. Da vi netop har vist, at den indeholder $\mathbf{Q}$, vil afslutningen af $\mathbf{Q}$ også være indeholdt i $\mathcal{M}$. Men eftersom afslutningen af $\mathbf{Q}$ jo er $\mathbf{R}$ ($\mathbf{Q}$ ligger tæt i $\mathbf{R}$), må altså i alt $\mathbf{R} \subseteq \mathcal{M}$, m.a.o. $\mathbf{R} = \mathcal{M}$. Ergo er $f = g$ på hele $\mathbf{R}$, hvilket viser, at f er lineær. Hermed er påstanden bevist."

B: "Det lyder jo ganske antageligt, Sokrates." (Platon: Faidros)

A: "Ethvert ulige tal er sammensat. Thi hvis n er ulige, er $n = ((n+1)/2)^2 - ((n-1)/2)^2$, hvor både $(n+1)/2 = k$ og $(n-1)/2 = m$ er hele tal (da n er ulige). Men eftersom $k^2 - m^2 = (k-m)(k+m)$, er n sammensat."

B: "Ræsonnementet er forkert, fordi $k - m = 1$, så der påstås blot at $n = 1 \cdot n$, hvilket jo ikke gør n til et sammensat tal."

- Beviset for irrationalitet af $\sqrt{2}$.

Til illustration af hvad det kan betyde *at vide og forstå, hvad et bevis (ikke) er*, kan vi anføre følgende bevisforslag:

A: "Hvis f har grænseværdien b for x gående mod a, og g har grænseværdien c for y gående mod b, må den sammensatte funktion $g \circ f$ have grænseværdien c, når x går mod a. For når x går mod a, vil jo pr. forudsætning $f(x)$ gå mod b, hvilket videre pr. forudsætning om g fører til, at $g(f(x))$ går mod c, hvilket netop var påstanden."

B: "Dette er ikke et holdbart bevis, for håndteringen af grænseværdibegrebet er for løs og uskarp. Faktisk er den påstand der 'bevises' forkert, med mindre g opfylder yderligere forudsætninger. Problemet er, at værdimængden for f kan være indeholdt i en del af definitionsmængden for g, på en sådan måde at den sammensatte funktion ikke kan nærme sig c. Som fx med f og g defineret ved $f(x) = 0$ for alle x, og $g(0) = 1$, men $g(y) = 0$ ellers. Så vil med $a = 0$, $f(x)$ gå mod $b = 0$ for x gående mod a. Desuden vil $g(y)$ gå mod $c = 0$ for y gående mod $b(= 0)$. Men $g(f(x)) = 1$ for alle x. Det gælder derfor ikke, at $g \circ f$ har grænseværdien $c(= 0)$ for x gående mod a."

Afdækning af *de bærende idéer i et (korrekt) bevis* kan illustreres således:

- "Gauss' bevis for at $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$ hviler på den idé at man kan bestemme summen ved hjælp af en ligning. Ved at lægge tallet $n+\ldots+2+1$ til venstresiden fås dels den søgte sum to gange, dels n parenteser hver bestående af to tal hvis sum er $n+1$. At udnytte dette til at udtrykke summen er derefter teknik (multiplikation af n med $n+1$ efterfulgt af løsning af en enkel ligning).

  Dette bevis har en fordel fremfor et sædvanligt induktionsbevis, som har den svaghed, at det forudsætter et bud på summen, hvilket ikke er påkrævet i Gauss' bevis, som faktisk bestemmer summen."

- "Hovedidéen i det sædvanlige bevis for dimensionssætningen i lineær algebra ("For en lineær afbildning F af et endeligdimensionalt vektorrum $\mathcal{V}$ ind i et vektorrum $\mathcal{W}$ er summen af dimensionerne af nulrummet (kernen) og billedrummet for F lig dimensionen af $\mathcal{V}$") er følgende. Først opsøges en (endelig) basis for nulrummet for F, hvilket er muligt, da nulrummet er et underrum i det endeligdimensionale vektorrum $\mathcal{V}$. Nu ved vi fra den almindelige teori, at denne basis kan suppleres op til en basis for hele $\mathcal{V}$. Opsøger vi nu billederne ved F af disse supplerende basisvektorer, kan vi først indse, at de udspænder hele billedrummet for F (F's værdier på nulrummet er jo alle 0, så de bidrager ikke meget til festen), dernæst, at de faktisk er lineært uafhængige - hvilket følger af, at de er billeder af basisvektorer, sammenholdt med F's linearitet. Derved udgør de en basis for billedrummet. Deres antal er jo netop differensen mellem dimensionen af $\mathcal{V}$ og dimensionen af nulrummet for F, hvilket just er indholdet af dimensionssætningen."

Endelig kan *selvstændig bevisførelse*, fra heuristik til formelt bevis, illustreres med følgende eksempel:

- "Man må kunne bevise 9-prøvens korrekthed på basis af den observation, at 9 går op i 99, 999, 9999.

  Kernen i denne observation er jo i formaliseret form, at 9 altid går op i $\sum_{k=1}^{k=p-1} 9 \cdot 10^k$ ($p > 1$), som imidlertid er lig $10^p - 1$ (addition af en endelig kvotientrække). Derved går 9 op i $T = \sum_{p=0}^{p=n} a_p 10^p = \sum_{p=0}^{p=n} a_p(10^p - 1) + \sum_{p=0}^{p=n} a_p$, netop hvis 9 går op i $\sum_{p=0}^{p=n} a_p$, som jo præcis er tallet T's tværsum.

  Mere generelt går $x - a$ (for $x \neq a$) op i $x^p - a^p$, idet $(x - a)\left(x^{p-1} + ax^{p-2} + a^2x^{p-2} + \ldots + a^{p-1}\right) = x^p - a^p$. For $x = 10$ og $a = 1$ fås resultatet for 9-prøven, mens vi med $x = 10$ og $a = -1$ får den såkaldte 11-prøve. Er nemlig p lige, slutter vi, at $11 = 10 - (-1)$ går op i $10^p - (-1)^p = 10^p - 1$, mens 11 for p ulige går op i $10^p - (-1)^p = 10^p + 1$. Det betyder, at 11 går op i et tal, netop hvis det går op i tallets såkaldte alternerende tværsum, som for tallet $\sum_{p=0}^{p=n} a_p 10^p$ defineres som $a_0 - a_1 + a_2 + \ldots + (-1)^n a_n$."

  (Bemærkning: Det er også ved indsættelse af $x = a + h$ i den nævnte formel, at det uden videre sluttes, at differenskvotienten $\frac{(a+h)^p - a^p}{h}$ for funktionen $x \mapsto x^p$ ($p \geq 1$) går mod pa^{p-1}.)

Man kunne også nævne en reparation af forudsætningerne og argumenterne i ovenstående "bevis" vedrørende sammensatte funktioner. Hvis fx g forudsættes at være kontinuert i b, er påstanden korrekt, og bevisskitsen kan udbygges og præciseres til et korrekt bevis.

H.2.5 Repræsentationskompetence

Karakteristik

I universitetsuddannelserne i matematik består denne kompetence dels i at kunne *forstå* (dvs. afkode, fortolke og skelne mellem) og *betjene sig af* forskellige slags repræsentationer af matematiske objekter, fænomener, problemer eller situationer (herunder symbolske, specielt algebraiske, visuelle, geometriske, grafiske, diagrammatiske, tabelmæssige eller verbale repræsentationer, men også konkrete repræsentationer ved materielle objekter), dels i at kunne forstå de indbyrdes *forbindelser* mellem forskellige repræsentationsformer for det samme sagsforhold og have kendskab til deres styrker og svagheder, herunder informationstab og -tilvækst, dels i at kunne *vælge* blandt og *oversætte* imellem forskellige repræsentationsformer for et givet sagsforhold, alt efter situation og formål.

Eksemplificering

På universitetsniveau er mængden af eksempler på denne kompetence af gode grunde ganske mange. Matematik på dette trin betjener sig uafbrudt af en mangfoldighed af symbolske, geometriske, grafiske, diagrammatiske, tabelmæssige, IT-bårne, visuelle samt verbale repræsentationer. Også det at kunne oversætte mellem dem er på dagsordenen uafbrudt. Det er også ganske sædvanligt, at det samme matematiske objekt repræsenteres forskelligt i forskellige matematiske domæner og under anlæggelsen af forskellige synsvinkler. Vi indskrænker os til at give et mindre antal eksempler.

Det er velkendt, at universitetsmatematik betjener sig af et væld af symbolske repræsentationer, hentet fra adskillige alfabeter (latinsk, græsk, gotisk, hebraisk) samt fra særlige matematiske symbolbiblioteker.

Når det gælder visuelle repræsentationer i bred forstand kan nævnes

- Kombinerede Venn- og pilediagrammer – ofte ganske komplekse – benyttes dagligt til repræsentation af mængder, delmængder, og afbildninger i universiteternes matematikundervisning. Principdiagrammer for grafer (i den betydning ordet har i diskret matematik), matricer, funktordiagrammer og lignende, der også hører hjemme i denne forbindelse, kan ligefrem blive selvstændige matematiske objekter. Af særlig betydning er det her at kunne forstå og fortolke – og især undlade at overfortolke – indeholdet i sådanne diagrammer.

- Plane tegninger, gerne af semiperspektivisk art, til at repræsentere koordinatsystemer, geometriske objekter og funktionsgrafer i en, to og tre dimensioner er standard i universitetsmatematik.

  På dette trin benyttes tegninger i planen jævnligt ikke blot til at repræsentere tredimensionale forhold, men også mangedimensionale forhold, som af oplagte grunde ikke lader sig afbilde direkte, og også af forhold som ikke er af egentlig geometrisk natur, men fx af algebraisk eller topologisk art. Man kan her fx tænke på mængdefigurer af en gruppe med sideklasser, Mandelbrotmængden, vektorfeltstegninger til repræsentation af differentialligninger, tegninger af Riemannflader for komplekse funktioner m.v.

  Sådanne tegninger i dynamisk udgave, hvor ændringer som funktion af en diskret eller kontinuert varierende parameter (fx tid) er af betydning, hører selvfølgelig også hjemme her.

- Forskellige former for datarepræsenterende diagrammer, fx histogrammer, stolpediagrammer, lagkagediagrammer, boxplots, scatterplots osv. er af særlig betydning i statistiske sammenhænge.

- Tabeller benyttes i moderne matematik hovedsagelig til sammenfatning af information snarere end som redskab for manipulation.

- Repræsentationer ved hjælp af IT-systemer af matematiske objekter (frem for alt tal og geometriske genstande), fænomener og processer er det næppe påkrævet at komme nærmere ind på her.

Det samme matematiske objekt eller fænomen kan ofte gives mange forskellige matematiske repræsentationer, alt efter hvilket synspunkt der anlægges. Nu og da opstår så et informationstab. Fx kan lineære afbildninger af endeligdimensionale vektorrum repræsenteres på matrixform. Her kommer et par andre eksempler.

Komplekse tal kan fx repræsenteres som

- talpar, underlagt de komplekse kompositioner $+$ og $\cdot$.
- en særlig slags objekter med den særlige form $a+ib$.
- geometriske objekter på modulus-argument-form.
- elementer i udvidelseslegemet for $\mathbf{R}$ ved adjunktion af den komplekse enhed i.

En vis kendt konstant kan repræsenteres

- med symbolet π.
- som en uendelig decimalbrøk $3,14159265\ldots$.
- geometrisk som omkredsen af en cirkel med diameter 1.
- som $2\arcsin 1$ (hovedværdien af arcsin).
- som grænseværdien for den uendelige række $4-4/3+4/5-4/7+4/9-\ldots$

Et andet eksempel er begrebet en plan i rummet, der kan repræsenteres som bl.a.

- et aksiomatisk givet geometrisk objekt.
- et translateret to-dimensionalt underum i $\mathbf{R}^3$ anskuet som vektorrum.
- fikspunktsmængden for en (bestemt slags) isometri af rummet.
- mængden af punkter X, der opfylder at vektoren PX, hvor P er et givet punkt, er ortogonal til en given egentlig vektor.
- løsningsmængden til en ligning af formen $ax+by+cz=d$ i $\mathbf{R}^3$ (under passende forudsætninger om koefficienterne).
- en parameterfremstillet punktmængde.
- skillemængden mellem to halvrum.

Endnu et eksempel er en ellipse, der bl.a. kan repræsenteres

- geometrisk som et snit i en kegle eller en cylinder.
- som skyggen af en kugle.
- som billedet af en cirkel ved en passende affin transformation i planen.
- som det geometriske sted for alle de punkter, hvis afstande til to givne punkter har en konstant sum.
- som mængden af punktpar i et koordinatsystem, som opfylder ligningen $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ $(a, b \neq 0)$.
- som en punktmængde i polære koordinater $r(\theta) = \frac{c}{1+e\cos\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$.

For alle eksemplerne går repræsentationskompetencen bl.a. ud på at forstå repræsentationerne, have klarhed over forbindelserne mellem dem, herunder informationstab og -gevinst ved overgang fra den ene til den anden, og over styrker og svagheder ved de enkelte repræsentationer, og på at være i stand til at vælge (mellem) en eller flere af dem.

H.2.6 Symbol- og formalismekompetence

Karakteristik

I universitetsuddannelserne i matematik består denne kompetence dels i at kunne *afkode* symbol- og formelsprog, i at kunne *oversætte* frem og tilbage mellem symbolholdigt matematisk sprog og naturligt sprog, og i at kunne *behandle og betjene sig af* symbolholdige udsagn og udtryk, herunder formler. Dels i at *have indsigt i* karakteren af og "spillereglerne" for formelle matematiske systemer (typisk aksiomatiske teorier).

Eksemplificering

Det er åbenbart, at omgang med matematik på universitetsniveau automatisk indebærer en vidtstrakt omgang med matematiske symboler og formler, som skal kunne forstås, fortolkes og manipuleres. Symbolerne omfatter adskillige biblioteker, rækkende fra diverse alfabeter – de latinske, græske, gotiske og tilsvarende alfabeter – brugt i forskellige roller, over elementære talsymboler, regneoperationer, til diverse specialiserede symbolsæt. I betragtning af at store dele af matematikken rummer kalkulatoriske og symbolbehandlende elementer, er det næppe påkrævet at eksemplificere dette.

Derimod kan der måske være grund til på dette niveau at fremhæve betydningen af forståelsen af formel symbolsk syntaks, såsom at $\sum_{i=0}^{i=i} x_i$ eller $\int_t^{2t} f(t)dt$ er meningsløse og ulovlige udtryk, og at $f^{-1}(x)$ ikke er det samme som $\frac{1}{f(x)}$, heller ikke i situationer hvor begge udtryk giver mening, at $x \mapsto f(x)$ ikke betyder, at x konvergerer mod $f(x)$ osv. Hertil hører også, at det samme symbol ikke kan stå for forskellige ting i en given sammenhæng, mens forskellige symboler godt kan stå for den samme ting, indtil det er godtgjort, at der virkelig er tale om den samme ting, fx ved løsning af en ligning.

På universitetsniveau har man ofte brug for selv at vælge eller finde på symboler. Det indgår så i denne kompetence, at man kender til konventionerne for symbolvalg, fx at man, om end objekter i princippet kan kaldes hvad som helst, så længe der ikke er basis for misforståelser, traditionelt navngiver konstanter med bogstaver fra den første ende af alfabetet, mens variable gerne har betegnelser fra den sidste ende af det engelske alfabet s, t, u, v, w, x, y, z, mens man ikke benytter $æ, ø, å$. Til konventionerne hører også, at man undgår at benytte faste betegnelser, som fx π, e, $\mathbf{R}$, i sammenhænge, hvor det kan give anledning til misforståelser. I sammenhænge hvor komplekse tal indgår, må man undgå at forveksle den imaginære enhed i med det naturlige tal i som løbevariabel eller indeks.

Ræsonneret manipulation af formler kræver vist ikke særlig illustration. Allerede eksemplerne ovenfor på de øvrige kompetencer rummer mange illustrationer af det.

Af særlig betydning på dette trin er evnen til at omgås formelle matematiske systemer, typisk i form af aksiomatiske teorier, såsom ikke-euklidisk geometri, gruppeteori, teorien for Riemannintegralet, sandsynlighedsteori osv., men også i form af kalkulatoriske formalismer, fx matrixregning og boolesk algebra. Her er den strenge overholdelse af det givne grundlag og de definere(n)de spilleregler for systemet essentiel. Men det indgår også her at kunne forstå og udnytte, at det selv samme korpus i en aksiomatisk teori ofte kan erhverves ved valg af et andet udgangspunkt og nogle andre aksiomer. Således kan abstrakt mål- og integralteori enten opbygges med udgangspunkt i målbegrebet, mens integralbegrebet så bliver afledet, eller omvendt med udgangspunkt i integralbegrebet, hvor så målbegrebet bliver afledet.

Lad os afslutte eksemplificeringen af denne kompetence med et par enkle eksempler.

Det at kunne *afkode symbol- og formelsprog* kan eksemplificeres ved

- at kunne udtrykke, at $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$ er en partiel differentialligning (den såkaldte diffusionsligning), der eftersøger de funktioner f af éndimensionalt sted x og tid t, som overalt og altid opfylder, at den partielle afledede med hensyn til tiden er identisk med den 2. ordens partielle afledede med hensyn til stedet.
- at kunne gøre rede for indholdet i, hvad der er blevet kaldt "verdens smukkeste formel": $e^{i\pi} + 1 = 0$.

- at afkode $\mathrm{Var}X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}X)^2$ som et udsagn (faktisk en definition) om, at variansen af en stokastisk variabel er middelværdien af kvadratet på den centrerede stokastiske variabel.

Formulering af sproglige udsagn ved hjælp af symbol- og formelsprog kan eksemplificeres af, at det udsagn, at en reel funktionsfølge $(f_n)_n$ konvergerer uniformt (ligeligt) mod en funktion f på en mængde $\mathcal{M}$, kan præciseres således

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbf{N} \forall n \geq N \forall x \in \mathcal{M} [|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon]$$

H.2.7 Kommunikationskompetence

Karakteristik

I universitetsuddannelserne i matematik består denne kompetence dels i at kunne *sætte sig ind i og fortolke* andres matematikholdige skriftlige, mundtlige eller visuelle udsagn og "tekster", dels i at kunne *udtrykke sig* på forskellige måder og på forskellige niveauer af teoretisk eller teknisk præcision om matematikholdige anliggender, skriftligt, mundtligt eller visuelt over for forskellige kategorier af modtagere.

Eksemplificering

En hvilken som helst skriftlig eller mundtlig fremstilling af en matematisk aktivitet kan tjene til at eksemplificere *udtrykssiden* af kommunikationskompetencen. For eksempel falder det at kunne gøre rede for en matematisk betragtning, fx løsningen af en opgave eller et problem, eller indretningen af og egenskaberne ved en matematisk model, inden for denne. Tilsvarende vil afkodningen og fortolkningen af matematiske fremstillinger, fx i en lærebog, et foredrag, eller en videnskabelig artikel, eksemplificere, hvad man kunne betegne *den modtagende side* af kommunikationskompetencen.

Også evnen til at indgå i diskussioner med andre om matematikholdige emner kræver kommunikationskompetence.

På universitetsniveau er det at kunne udtrykke sig om det samme matematiske sagsforhold i et bredt spektrum af forskellige såkaldte "sproglige registre", af varierende begrebslig og teknisk specificitet, af særlig vigtighed.

Fx på den ene side at være i stand til at beskrive en sædvanlig differentialligning som en særlig slags ligning, hvor de ubekendte ikke er tal eller talsæt, men funktioner af én variabel, og hvor ligningen forbinder nogle af den ubekendte funktions afledede med funktionen selv og eventuelt andre givne funktioner af den variable. Ligningens orden er ordenen af den højeste afledede som optræder. Og på den anden side at være i stand til at definere en n'te ordens sædvanlig differentialligning ved $F(t, f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)) = 0$, hvor F er en funktion fra en vis delmængde $\mathcal{D}$ af $\mathbf{R}^{n+2}$ ind i $\mathbf{R}$, og hvor der ved en løsning forstås en n gange differentiabel funktion $f : I \mapsto \mathbf{R}$, på et åbent interval I i de reelle tal, som opfylder dels, at $(t, f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)) \in \mathcal{D}$ og dels, at $F(t, f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)) = 0$ for alle $t \in I$. Her hører det også med at kunne bedømme, hvem der har brug for/glæde af at høre hvilken forklaring under hvilke omstændigheder.

H.2.8 Hjælpemiddelkompetence

Karakteristik

I universitetsuddannelserne i matematik består denne kompetence dels i at *have kendskab til* eksistensen og egenskaberne ved diverse former for relevante redskaber til brug for matematisk virksomhed, og have indblik i deres *muligheder og begrænsninger* i forskellige slags situationer, dels i at være i stand til på reflekteret vis at *betjene sig af* sådanne hjælpemidler.

Eksemplificering

Vi kan her nævne den tænksomme omgang med lommeregnere og computere, samt IT-software af typen Cabri-Géomètre, regneark, MathCad, Maple, Mathematica, statistikspakkerne SAS og R, osv., til brug for såvel kalkulationer som grafiske repræsentationer, empiriske undersøgelser, statistik og dynamisk visualisering osv. Datalogiske programmeringssprog som Pascal, C^{++} og lignende kunne også komme på tale her. Også matematiske tekstbehandlingsprogrammer som TeX, hvori denne rapport er skrevet, er naturligt på dagsordenen på universitetsniveau.

Men også kendskab til eksistensen og mulighederne i fysiske modeller og maskiner til fremstilling af matematiske objekter og fænomener kunne komme på tale her. Eksempler på det er modeller af polyedre eller polyederoverflader, tråd-, plastic- eller hindemodeller af flader fra differentialgeometri eller algebraisk geometri, maskiner til tegning af geometriske steder, maskiner til illustration af statistiske fordelinger (fx Galtons bræt).

H.3 Matematisk overblik og dømmekraft i universitetsuddannelser i matematiske fag

Det er vores opfattelse, at det for alle matematiske fag er vigtigt at sigte mod, at de studerende får opbygget alle de tre former for overblik og dømmekraft, vi opererer med i dette projekt. Det indebærer bl.a., at også personer, som skal beskæftige sig forskningsmæssigt med ren matematik, har brug for at besidde overblik og dømmekraft vedrørende matematikkens faktiske anvendelse såvel som dens historiske udvikling. Det indebærer tillige, at personer inden for anvendte matematiske fag opnår overblik og dømmekraft vedrørende matematikkens historiske udvikling og dens karakter som fagområde.

Vi er klar over, at dette synspunkt til dels er i modstrid med traditionen, og at efterstræbelsen af den slags overblik og dømmekraft i nogle kredse vil blive betragtet som enten en overflødig luksus eller som et privat anliggende for særligt interesserede, som er universitetet uvedkommende. Det er imidlertid vores opfattelse, at et sådant perspektiv på uddannelserne dels vil kunne bidrage til at øge rekrutteringen til de pågældende studier, dels vil styrke de kommende kandidaters muligheder for kompetent udøvelse af deres fremtidige erhverv, og endelig vil bidrage til, at folk med matematiske fag bedre kan kommunikere med omverdenen om matematikkens rolle i samfundet, og om hvad matematik går ud på og gør godt for.

H.3.1 Matematikkens faktiske anvendelse i andre fag- og praksisområder

Karakteristik

I universitetsuddannelserne i matematik er genstanden for denne form for overblik og dømmekraft den faktiske anvendelse af matematik til udenomsmatematiske formål inden for områder af dagligdags, samfundsmæssig eller videnskabelig betydning. Denne anvendelse kommer i stand og til udtryk gennem bygningen og udnyttelsen af matematiske modeller.

Eksemplificering

Sagen kan eksemplificeres af spørgsmål som:

- "Hvem uden for matematikken selv bruger den faktisk til noget?"
- "Til hvad?"
- "Hvorfor?"
- "Hvordan?"
- "Gennem hvilke midler?"
- "På hvilket grundlag?"
- "Med hvilke forudsætninger?"

- "Med hvilke konsekvenser?"
- "Hvad skal der til for at kunne bruge den?" M.v.

H.3.2 Matematikkens historiske udvikling, såvel internt som i samfundsmæssig belysning

Karakteristik

I universitetsuddannelserne i matematik er genstanden for denne form for overblik og dømmekraft det forhold, at matematikken har udviklet sig i tid og rum, i kultur og samfund.

Eksemplificering

Af interesse er spørgsmål som:

- "Hvordan har matematikken udviklet sig gennem tiden?"
- "Hvad har været de indre og ydre drivkræfter i udviklingen?"
- "Hvilke slags aktører har været indblandet i udviklingen?"
- "I hvilke samfundsinstitutioner har den fundet sted?"
- "Hvordan har samspillet med andre felter været?" M.v.

H.3.3 Matematikkens karakter som fagområde

Karakteristik

Som fagområde har matematikken sine egne karakteristika. Det er disse karakteristika, der *i universitetsuddannelserne i matematik* er genstand for den foreliggende type overblik og dømmekraft. Nogle karakteristika har matematikken tilfælles med andre fagområder, andre er den ret alene om.

Eksemplificering

Der tænkes her på spørgsmål som:

- "Hvad er karakteristisk for matematikkens problemstillinger, tankegange og metoder?"
- "Hvilke slags resultater leverer den, og hvad bruges de til?"

- “Hvad er en matematisk teori?”
- “Hvorfra kommer inspirationen til udvikling af matematiske teorier?”
- “Hvilken videnskabsteoretisk status har dens begreber og resultater?”
- “Hvordan er matematikken opbygget?”
- “Hvordan er dens forbindelse til andre discipliner?”
- “På hvilke måder adskiller den sig som videnskab fra andre discipliner?” M.v.

Litteratur

Allerup, P., Bredo, O. & Weng, P. (1998). *Matematik og naturvidenskab i ungdomsuddannelserne – en international undersøgelse*, DPI (TIMMS), København.

Andersen, A. M., Egelund, N., Jensen, T. P., Krone, M., Lindenskov, L. & Mejding, J. (2001). *Forventninger og færdigheder – danske unge i en international sammenligning*, AKF, DPU og SFI (OECD – PISA), København.

Barnes, M., Clarke, D. & Stephens, M. (2000). Assessment: the engine of systemic curricular reform?, *Journal of Curriculum Studies* **32**: 623–650.

Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. (eds) (1996). *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Bodin, A. (1993). What does to assess mean? the case of assessing mathematical knowledge, *in* Niss (1993c), pp. 113–141.

Christiansen, B. (1989). Konferencens tema i fagdidaktiske perspektiver, *in* Statens Humanistiske Forskningsråd: Initiativet vedrørende matematikundervisning (ed.), *Gymnasiets matematikundervisning mellem studie- og erhvervskrav og demokratikrav*, IMFUFA, Roskilde Universitetscenter, pp. 33–92. Kan rekvireres ved henvendelse til imfufa@ruc.dk.

Clarke, D. (1996). Assessment, *in* Bishop et al. (1996), pp. 327–370.

Gregersen, P. & Jensen, T. H. (1998). Problemløsning og modellering i en almendannende matematikundervisning, *Tekster fra IMFUFA* **353**: Roskilde Universitetscenter. Kan rekvireres ved henvendelse til imfufa@ruc.dk.

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik – Studien zur Schulpädagogik und Didaktik*, Beltz, Weiheim und Basel, Tyskland.

Jakobsen, A. et al. (1999). Kvalitetsudviklingsprojektet "faglig sammenhæng" – hovedrapport, *Technical Report 1*, Center for Didaktik og Metodeudvikling, Danmarks Tekniske Universitet.

Jensen, H. S. & Skovsmose, O. (1986). *Teknologikritik – et teknologi-filosofisk essay*, Systime.

Jensen, P. H. & Kyndlev, L. (1994). Det er ikke til at se det, hvis man ikke lige ve' det! gymnasiematematikkens begrundelsesproblem, *Tekster fra IMFUFA* **284**: Roskilde Universitetscenter. Kan rekvireres ved henvendelse til imfufa@ruc.dk.

Lindenskov, L. & Wedege, T. (1999). Numeralitet til hverdag og test. om numeralitet som hverdagskompetence og om internationale undersøgelser af voksnes numeralitet, *Tekster fra Center for forskning i matematiklæring* **16**: DPU, RUC, AAU. Kan rekvireres ved henvendelse til imfufa@ruc.dk.

Niss, M. (1993a). Assessment in mathematics education and its effects: An introduction, *in* M. Niss (ed.), *Investigations into Assessment in Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, pp. 1–30.

Niss, M. (1996). Goals of mathematics teaching, *in* Bishop et al. (1996), pp. 11–47.

Niss, M. (1999). Kompetencer og uddannelsesbeskrivelse, *Uddannelse* **9**: 21–29.

Niss, M. (2000). Gymnasiets opgave, almen dannelse og kompetencer, *Uddannelse* **2**: 23–33.

Niss, M. (ed.) (1993b). *Cases of Assessment in Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Niss, M. (ed.) (1993c). *Investigations into Assessment in Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

OECD (1999). *Measuring Student Knowledge and Skills – A new Framework for Assessment*, OECD, Programme for International Student Assessment (PISA), Paris, France.

OECD (2001). *Knowledge and Skills for Life – First Results from PISA 2000*, OECD, Programme for International Student Assessment (PISA), Paris, France.

Ramsden, P. (1999). *Strategier for bedre undervisning*, Gyldendal, København. Oversat efter "Learning to Teach in Higher Education", Routledge, UK, 1992.

Simonsen, B. & Ulriksen, L. (eds) (1998). *Universitetsstudier i krise: Fag, projekter og moderne studenter*, Roskilde Universitetsforlag, Roskilde.

The National Commission on Mathematics and Science Teaching for the 21st Century (2000). *Before It's Too Late ("The Glenn-report")*, U.S. Department of Education, Washington DC, USA. Se http://www.ed.gov/americacounts/glenn/.

Undervisnings- og forskningsministeriet (1990). *Matematik. Undervisningen i matematik i det danske uddannelsessystem. En beskrivelse og vurdering af mål og indhold*, Undervisnings- og forskningsministeriet.

Undervisningsministeriet (1978). *U90 – Samlet uddannelsesplanlægning frem til 90'erne, bind 1 og 2*, Undervisningsministeriet.

Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie

I denne serie udsender Uddannelsesstyrelsen publikationer om generelle eller mere specifikke aktuelle emner. Formålet er at skabe debat og inspirere til udvikling i uddannelserne.

I 2001 er følgende udkommet i serien:

Nr. 1 - 2001: Intern evaluering i andetsprogsundervisningen - en antologi (UVM 9-053) (Voksenuddannelser)
Nr. 2 - 2001: Praktik i udlandet - for social- og sundhedselever (UVM 7-328) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 3 - 2001: ..kun løs er al fremmed tale? : Modersmålsundervisning i gymnasiet i en række europæiske lande (UVM 6-276) (Gymnasiale uddannelser)
Nr. 4 - 2001: HF-forsøg 1997-2000 : Evaluering af 2- og 3-årige forsøg : Statusrapport fra Hf-evaluerings-gruppen (UVM 6-273) (Almengymnasiale uddannelser)
Nr. 5 - 2001: Ledelse og lokal undervisningsplanlægning - kvalitet i skolens grundydelser (UVM 7-329) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 6 - 2001: Indslusningsforløb for flerkulturelle elever på sosu og pgu (UVM 7-330) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 7 - 2001: Kommunernes vejledning af børn og unge med særlige behov (UVM 5-372) (Grundskolen)
Nr. 8 - 2001: På vej mod et nyt hf : Resultater af Hf-evalueringsgruppens arbejde : 1. del (6-274) (Almengymnasiale uddannelser)
Nr. 9 - 2001: Eleverne og eud-reformen -oplevelser af forsøg med grundforløb og hovedforløb i 2000 (UVM 7-332) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 10 - 2001: Hvordan gik det? - sammenfatning af Erfaringer fra forsøg med eud-reformen i 2000 (UVM 7-331) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 11 - 2000: Erfaringer fra forsøg med eud-reformen - grundforløb og hovedforløb i 2000 (UVM 7-333) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 12 - 2001: Sådan gør vi - integration af tosprogede småbørn i store og små kommuner (UVM 5-378) (Grundskolen)
Nr. 13 - 2001: Kvalitetsudvikling i VUC - et værktøj til selvevaluering (UVM 0101) (Voksenuddannelser)
Nr. 14 - 2001: Læsefærdigheder, læsevejledning og læseundervisning - i erhvervsuddannelserne (UVM 7-335) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 15 - 2001: Rapport fra arbejdsgruppen om gymnasiernes økonomi og kvalitet (UVM 6-275) (Gymnasiale uddannelser)
Nr. 16 - 2001: Uddannelse, læring og demokratisering (UVM 7-336) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 17 - 2001: Projektarbejde i kemi - i gymnasiet og hf (UVM 6-277) (Almengymnasiale uddannelser)
Nr. 18 - 2001: Fleksible læringsmiljøer i andetsprogsundervisningen - en antologi (UVM 9-055) (Voksenuddannelser)
Nr. 19 - 2001: At lære fysik: Et studium i gymnasieelevers læreprocesser i fysik (UVM 6-278) (Almengymnasiale uddannelser)
Nr. 20 - 2001: Evaluering af Den Fri Ungdomsuddannelse : Slutrapport (UVM 7-337) (Øvrige ungdomsuddannelser)
Nr. 21 - 2001: Elever i erhvervsuddannelse - mellem skole og virksomhed (UVM 7-338) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 22 - 2001: Eleven i centrum : Om elevindflydelse og medbestemmelse på htx (UVM 6-279) (Erhvervsgymnasiale uddannelser)
Nr. 23 - 2001: Kvalitetsudvikling i gymnasiet (UVM 6-280) (Almengymnasiale uddannelser)
Nr. 24 - 2001: Nye dimensioner i erhvervsskolernes vejledning (UVM 7-339) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 25 - 2001: Nye måder - nye midler : Banebryder II (UVM 5-381) (Grundskolen)
Nr. 26 - 2001: Undervisning i andetsprogslæsning og -skrivning (UVM 9-057) (Voksenuddannelser)
Nr. 27 - 2001: Fakta om sosu-reformen 2001 (UVM 0106) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 28 - 2001: Elevindflydelse, lærerteam og evaluering på grundforløbet i eud (UVM 7-341) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 29 - 2001: Skoleeksempler - erhvervsskolebyggeri til det 21. århundrede (UVM 7-343) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 30 - 2001: Demokrati i undervisning og skole - eksempler fra erhvervsskoler (UVM 7-344) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 31 - 2001: På vej mod et nyt hf. Resultater af hf-evalueringsgruppens arbejde 2. del (UVM 6-283) (Almengymnasiale uddannelser)

Nr. 32 - 2001: Fra klar besked til dialog - idékatalog til det lokale uddannelsesudvalg (UVM 7-346) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 33 - 2001: Tanker om eud-reformen - en pædagogisk og organisatorisk udfordring (UVM 7-345) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 34 - 2001: Fag, pædagogik og IT i det almene gymnasium - status og perspektiver - 1. faglige rapport Det Virtuelle Gymnasium (UVM 6-258) (Almengymnasiale uddannelser)
Nr. 35 - 2001: Modeller for fag og læring i Det Virtuelle Gymnasium - 2. faglige rapport (UVM 6-250) (Almengymnasiale uddannelser)
Nr. 36 - 2001: Organisation og IT i Det Virtuelle Gymnasium - 3. faglige rapport (UVM 6-238) (Almengymnasiale uddannelser)
Nr. 37 - 2001: Det Virtuelle Gymnasium - Det almene gymnasium i viden- og netværkssamfundet - Vision og strategi (UVM 6-245) (Almengymnasiale uddannelser)
Nr. 38 - 2001: Evaluering af forsøg på hf-enkeltfag (UVM 6-282) (Almengymnasiale uddannelser)
Nr. 39 - 2001: Projektarbejde og evaluering i billedkunst i gymnasiet og hf (UVM 6-281) (Almengymnasiale uddannelser)

I 2002 er følgende udkommet eller under udgivelse i serien:

Nr. 1-2002: Fokus på voksenlæreren. Om kvalificering af lærere inden for den almene voksenundervisning (UVM 6-284) (Voksenuddannelser)
Nr. 2-2002: Multikulturel vejledning (UVM 7-348) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 3-2002: Jeg kan noget, ved noget og jeg er noget - erfaringer med kompetenceudvikling på erhvervsskoler (UVM 7-349) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 4-2002: Læringens sociale aspekter - nye betingelser for elevernes fællesskaber (UVM 7-350) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 5-2002: Elevplan - et pædagogisk webværktøj til erhvervsuddannelserne (UVM 7-351) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 6-2002: Hvordan staver studenterne? - en undersøgelse af stavefejl i studentereksamensstilene 1998 (UVM 6-286) (Almengymnasiale uddannelser)
Nr. 7-2002: Skriv og lær - faglig skrivning i erhvervsuddannelserne (UVM 7-352) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 8-2002: Kombineret danskundervisning og værkstedsundervisning for flygtninge og indvandrere - evaluering af to forsøg (UVM) (Arbejdsmarkedsuddannelser)
Nr. 9-2002: Projektarbejde i naturfag - i det almene gymnasium (UVM 6-285) (Almengymnasiale uddannelser)
Nr. 10-2002: God praksis i eud-grundforløb (UVM 7-353) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 11-2002: Åbne læringslandskaber og sammenhængende uddannelsesforløb i AMU (UVM) (Arbejdsmarkedsuddannelser)
Nr. 12-2002: Fornyelse af de merkantile erhvervsuddannelser (Internetpublikation) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 13-2002: Skolesamarbejdernes erfaringer fra eud-forsøgene (Internetpublikation) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 14-2002: Vekseluddannelse i håndværksuddannelser. Lærlinges oplæring, faglighed og identitet mellem skole og virksomhed (UVM) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 15-2002: Vekseluddannelse i håndværksuddannelser. Forskningsprojektets teori og metode (Internetpublikation) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 16-2002: Helhedsvurdering af eud-elever i grundforløb (UVM 7-354) (Erhvervsfaglige uddannelser)
Nr. 17-2002: ABC for fjernundervisning i AMU (UVM) (Arbejdsmarkedsuddannelser)
Nr. 18-2002: Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark (UVM 6-287) (Uddannelsesområderne)

Publikationerne kan købes hos Undervisningsministeriets forlag eller hos boghandlere. Visse publikationer er trykt i meget begrænset oplag og kan derfor kun rekvireres i ganske særlige tilfælde mod betaling af et ekspeditionsgebyr.

På UVM's website - på adressen: http://www.uvm.dk/katindek.htm - findes en oversigt over hæfter i Uddannelsesstyrelsens publikationsserier udgivet i 1999, 2000 og 2001